La théorie des catégories comme syntaxe pour la structure.
Pistes générales pour un développement futur.

Par
Clémence Chanavat

En collaboration avec :
Cécile Gauclère

Rapport de stage pour le titre d'ingénieure centralienne.

Août 2022

Table des matières

For you, obviously...

Ce rapport utilise le féminin neutre.

Remerciements

Je me trouve à un point étrange de ma vie, mêlé d'espoirs, de désillusions et de changements, j'ai heureusement la chance d'être toujours bien entourée.

Merci à Cécile pour m'avoir accompagnée dans cet incroyable projet, Julien et Antoine pour m'avoir permis de faire ce stage, mais aussi tous les membres de la Calebasse, qui font vivre cette communauté pleine d'ambitions et de créativités.

Je remercie aussi Pierre Chainais pour son précieux soutien auprès de l'Ecole Centrale que je remercie également pour avoir rendu ce travail possible.

De chaleureux remerciements à Pierre-Louis Curien pour ses conseils et ses explications qui m'ont beaucoup aidées tout au long des derniers mois et à Nicola Gambino et Jon Sterling, pour leur aide précieuse sur la théorie des topos et le forcing de Kripke-Joyal.

Je voudrais aussi remercier ma famille, Estelle, Morgan, et toutes celles et ceux qui me soutiennent dans ce que je suis.

Plus généralement, je pense qu'il est important de remercier tout le monde, toutes ces petites interactions quotidiennes qui laissent des marques qui, je pense, s'accumulent et font de nous des personnes plus bienveillantes. Alors, un peu naïvement, je remercie toutes celles et ceux dont j'ai croisé le chemin, et qui m'ont inspirée un sourire, une pensée, un étonnement, ou une conversation.

Finalement, vous saurez peut-être par qui je termine ces remerciements.

Avants-propos

Il n'y a pas, a priori, de différence entre la structure mathématique et celle du monde des choses. Ce travail tente de démontrer que la syntaxe de la première s'applique à la seconde. Par choses, nous entendons, en première approximation, le contraire de rien, de n'importe quoi qui dispose d'une ontologie, d'une entité, d'un système, soit-il abstrait, ou parfaitement concret.

Que les mathématiques en général servent de langage à toute sorte de sciences est devenu un lieu commun. La physicienne et la biologiste résolvent quotidiennement des équations différentielles, l'informaticienne utilise régulièrement des outils avancés de l'algèbre linéaire, et plus généralement, il semble que l'activité de l'organisation et du calcul de la pensée s'articule avec une syntaxe mathématique en tâche de fond. Nous disons ici *syntaxe mathématique*, car nous ne croyons pas que ce rapport soit autre chose que la présentation d'une syntaxe. Quelque soit l'ontologie propre à une science, ou un domaine donné, nous voulons proposer un système d'étiquetage pour l'emballer de manière universelle. Il est donc important ici de souligner que nous ne faisons que décrire, et donc qu'en aucun cas nous prétendons généraliser, rendre banales ou évidentes, les choses dont nous parlons. Elles sont le fruit et l'objet d'études de réflexions dépassant de loin la pertinence, l'originalité, et la complexité de ce rapport. Nous voulons simplement appliquer notre système de nommage, et essayer d'en démontrer le caractère universel.

Pourquoi faudrait-il une syntaxe de la structure universelle ? L'avènement de la théorie des catégories en mathématiques a été très loin de changer le quotidien de la mathématicienne, et nous pourrions même dire fut anecdotique. Ce que cette théorie a permis, c'est de créer un moyen de comparaison entre des domaines qui n'en avaient pas, et de créer un socle commun de notions structurelles à instancier au sein des théories même. Les algébristes de toute part se sont rendues compte qu'elles travaillaient toutes avec des adjonctions, même si de natures bien différentes. Plus tard, avec les travaux de Lawvere

[Law64], et plus généralement la notion de topos [LS86] due à Grothendieck, le langage catégorique a pu fournir une axiomatisation de ZFC, c'est-à-dire un fondement des mathématiques mêmes, dans une perspective structuraliste, donc d'un point de vue où l'on ne s'intéresse pas aux choses mêmes, mais aux liens qu'elles entretiennent avec les autres. D'ailleurs, un fait très général de la théorie des catégorie, résumé par le lemme de Yoneda, prouve (de manière parfaitement rigoureuse) que deux choses sont les mêmes si et seulement si elles entretiennent exactement les mêmes liens avec toutes les autres choses. Par ailleurs, des analogies fortes, utilisant les catégories, entre la physique, la topologie, la logique et le calcul en général ont été rendues précises dans [BS10]. L'auteure invite la lectrice intéressée par ce sujet à lire ce papier.

Pour résumer, nous souhaitons développer un langage de l'interdisciplinarité, un langage qui puisse servir d'étiquetage commun aux différences fondamentales de méthodes, de principes, et de réflexions qu'entretiennent les disciplines en général. Nous ne prétendons à rien de plus qu'une tentative de communication, et nous espérons que ira se rapport y sera sensible et souhaitera y répondre.

N'est-ce pas déjà le langage courant qui opère de telles dynamiques de communication universelle ? C'est parfaitement vrai, et si cette tentative existe et est possible, c'est grace au langage exécuté en français. Loin de vouloir s'y substituer, nous voulons plutôt l'enrichir avec un nouvel environnement d'execution, celui des catégories. Il ne remplace pas ceux déjà existant, il permet (nous l'espérons) un point de vue alternatif et calculatoire sur les concepts, nous souhaitons calculer le langage.

Guide de lecture

Le premier chapitre de cette section s'ouvre avec des notions de base en théorie des catégories. Elles sont indispensables à la bonne compréhension du travail exposé ici. Malheureusement, pour la lectrice non familière avec les mathématiques, c'est la manière même d'exposer le contenu dans ce rapport qui risque de créer de la difficulté, tandis que pour la lectrice avec une certaine habitude mathématiques, on pourra trouver les concepts exposés difficiles d'appréhension. Comme toute discipline scientifique, son acquisition prend du temps. Nous avons essayé de rendre intuitif le développement qui va suivre. Les définitions se trouvent accompagnées de descriptions en langage courant, et les résultats possèdent une certaine esthétique et une certaine saveur qui n'ont pas particulièrement besoin de connaissances mathématiques pour être appréciées.

Le deuxième chapitre propose de montrer comment les outils précédemment définis servent de language aux mathématiques constructives modernes. Il y sera question de préfaisceaux et de topos. La lectrice non familière avec ces sujets ne doit pas s'attendre à comprendre les concepts exposés, mais nous encourageons la lecture de ce chapitre, car nous avons essayé de montrer à quoi ces concepts servent et comment les penser, sans avoir besoin de recourir à des mathématiques avancés. Par ailleurs, certains passages ne comportent pas de difficulté technique et donnent une idée globale d'où en sont une partie des sciences mathématiques, et par où elles y sont arrivées.

La troisième partie tente de donner une fondation philosophique à la partie qui suivra. Pour ce faire, nous avons tenté de reprendre les éléments de la phénoménologie husserlienne, et de leur donner une lecture catégorique. L'auteure admet que cette partie est la plus bancale de son rapport, et serait ravie de discuter avec des personnes qualifiées avec cette philosophie pour en améliorer le contenu.

La quatrième partie est la contribution majeure de ce travail. Tout y est original, et c'est ici que se trouvent les pistes pour un développement futur. Nous montrerons comment interpreter de manière standard la théorie des catégories, puis nous verrons comment cette interprétation s'applique dans plusieurs domaines de la structure, allant des sciences sociales, aux interactions entres deux agentes, ou à la traduction d'une langue.

La dernière partie apporte une conclusion, et ébauche les projets futurs de l'auteure en lien avec la théorie des catégories.

1 Prémisses de catégories

Cette section sert de référence de base pour les outils théoriques utilisés dans ce rapport. Nous définissons dans un premier le temps les concepts de catégories, foncteurs, et transformations naturelles. Une fois cela fait, nous combinons ces concepts pour construire les notions de (co)limites, adjonctions, et extensions de Kan. Le lemme de Yoneda sera introduit dans le chapitre suivant. À l'intention de la lectrice disposant déjà d'expertise dans ce domaine, notez que dans ce chapitre, et bien souvent dans ce rapport, les questions de cardinalité seront mises de côté.

La seule phrase à avoir en tête lors de la première lecture de ce chapitre est la suivante. Les catégories sont des choses, les foncteurs des manières de faire entre les catégories, et les transformations naturelles des manières de faire entre les foncteurs. Ces trois briques permettent ensuite de tout faire. Voici un aperçu de comment les combiner.

1.1 Définitions

1.1.1 Catégorie

Une catégorie est quelque chose, appelons-la $\mathcal{C}$. Elle est munie d'*objets*, que l'on nomme (comme un tout commun) par $\operatorname{Obj}\mathcal{C}$ (ou plus souvent, directement $\mathcal{C}$). Entre chaque objet individuel $a, b \in \mathcal{C}$, on dispose d'un certains nombre de *liens* (ou *flèches*, ou *morphismes*), que l'on nomme $\mathcal{C}(a, b)$. Si $f \in \mathcal{C}(a, b)$ (donc si f est un morphisme de a vers b) on note aussi $f : a \to b$. Le tout doit respecter les contraintes suivantes.

1. Pour chaque triplet de choses $c, d, e \in \mathcal{C}$ et chaque lien $f \in \mathcal{C}(c, d)$ et $g \in \mathcal{C}(d, e)$, on a le lien composé $g \circ f \in \mathcal{C}(c, e)$, aussi noté gf.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & d \arrow[d, "g"] \\ & e \end{tikzcd}$$

2. Pour chaque objet $c \in \mathcal{C}$, on a un lien $\mathrm{id}_c \in \mathcal{C}(c, c)$, tel que :

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & c \arrow[d, "\mathrm{id}_c"] \\ & c \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dr, "g"'] & c \arrow[d, "g"] \\ & d \end{tikzcd} \quad \text{commutent}$$

Autrement dit, si $f \in \mathcal{C}(b, c)$ et $g \in \mathcal{C}(c, d)$, alors $\mathrm{id}_c \circ f = f$ et $g \circ \mathrm{id}_c = g$.

Plus généralement, on dit qu'un diagramme commute si peut importe le chemin que l'on choisi de parcourir dans le diagramme pour aller d'un objet a à un objet b, le lien résultant est le même.

3. Pour chaque objet $a, b, c, d \in \mathcal{C}$, pour chaque lien $f \in \mathcal{C}(a, b)$, $g \in \mathcal{C}(b, c)$ et $h \in \mathcal{C}(c, d)$,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & a \arrow[r, "f"] \arrow[dll, dashed] & b \arrow[r, "g"] & c \arrow[r, "h"] & d \arrow[drr, dashed] & & & \\ a \arrow[r, "gf"] & c \arrow[r, "h"] \arrow[drr, dashed] & d & & & & & a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "hg"] \arrow[dll, dashed] & d \\ & & & a \arrow[r, "h(gf)"] & d & & a \arrow[r, "(hg)f"] & d & & \end{tikzcd}$$

on a $h(gf) = (hg)f$. Cela permet d'écrire $h \circ g \circ f$ sans ambiguïté.

1.1.2 Foncteur

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des catégories, on peut définir la notion de foncteur, qui peut être vu comme un morphisme entre deux catégories.

Définition 1.1. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un* foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *est la donnée d'une manière de transformer n'importe quel objet $c \in \mathcal{C}$ en un objet $F(c) \in \mathcal{D}$, ainsi que de la manière de transformer n'importe quel flèche $f : a \to b$ de $\mathcal{C}$ en une flèche $F(f) : F(a) \to F(b)$ de $\mathcal{D}$, le tout étant sujet aux restrictions suivantes.*

— *Pour tout $c \in \mathcal{C}$, $F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}$*
— *Pour toutes flèches f, g, tel que $f \circ g$ existe, $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$*

L'application d'un foncteur F permet donc de passer de $a \xrightarrow{f} b$ à

$$F(a \xrightarrow{f} b) = F(a) \xrightarrow{F(f)} F(b)$$

La dernière condition de la définition se visualise par le fait que comme l'on a toujours que

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & d \arrow[d, "g"] \\ & e \end{tikzcd}$$

commute, on veut aussi avoir que

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g \circ f)"'] & F(d) \arrow[d, "F(g)"] \\ & F(e) \end{tikzcd}$$

commute, c'est-à-dire que $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$. Autrement dit, les foncteurs respectent les diagrammes commutatifs.

1.1.3 Transformation naturelle

Une fois les foncteurs définis, il faut passer aux transformations naturelles, qui peuvent être vues comme des morphismes de foncteurs.

Définition 1.2. *Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une* transformation naturelle $t : F \to G$ *est la donnée de flèches (dans $\mathcal{D}$) $t_c : F(c) \to G(c)$ pour chaque objet $c \in \mathcal{C}$ telle que, pour chaque flèche $f : a \to b$ de $\mathcal{C}$,*

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "t_a"'] & F(b) \arrow[d, "t_b"] \\ G(a) \arrow[r, "G(f)"] & G(b) \end{tikzcd}$$

commute, c'est-à-dire telle que $t_b \circ F(f) = G(f) \circ t_a$

Une transformation naturelle déforme un foncteur F en un foncteur G en chaque objet $a \in \mathcal{C}$. Cette déformation est compatible avec les morphismes, c'est à dire que déformer puis suivre le morphisme revient à la même chose que suivre le morphisme puis déformer.

Ces trois notions peuvent être vues comme les concepts fondamentaux de la théorie des catégories. Pour résumé, il y a les catégories, ce sont les objets de bases. En pratique, une catégorie est un endroit qui regroupe un assemblage cohérent d'objets, et surtout de liens entre ces objets. Par exemple, en mathématiques, dès lors que l'on a défini un certain type de structure, il est intéressant de se pencher sur les liens entre elles. Lorsque l'on a le concept d'ensemble, le *bon* type de liens entre deux ensembles est le concept de fonction. Lorsqu'on a le concept de groupe, le *bon* lien entre deux groupes est celui de morphisme de groupe, etc. Cela donne respectivement la catégorie Sets ayant pour objet les ensembles, et comme lien les fonctions ensemblistes, et la catégorie ayant comme objets les groupes, et comme lien les morphismes de groupes. Une fois cela fait, on s'intéresse aux foncteurs, qui sont des liens entres les catégories. Un foncteur est une manière de transformer une catégorie en une autre. Finalement, les transformations naturelle sont aux foncteurs ce que les foncteurs sont aux catégories, la lectrice voulant en savoir plus sur ces principes de base est invitée à consulter [Rie17] pour un point de vue plutôt mathématique, et [FS18] pour une approche plus orienté informatique et science des données.

1.1.4 Ubiquité et exemples

Catégories, foncteurs et transformations naturelles, ces trois notions se regroupent et donne un premier aperçu d'une ubiquité en théorie des catégories, qui nous suivra tout au long de ce rapport : l'auto-réflexivité.

Définition 1.3 (Catégorie de foncteurs). *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. La* catégorie de foncteurs $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ *est la catégorie ayant pour objets les foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ et comme morphismes les transformations naturelles.*

La lectrice voulant aller plus loin pourra essayer de prouver que les axiomes de catégories sont bien vérifiés. Par exemple, si $F \in \mathrm{Obj}([\mathcal{C}, \mathcal{D}])$, qu'est-ce que la transformation naturelle id_F ? Si $t : F \to G$, et $s : G \to H$, comment définir la transformation naturelle composée $s \circ t$? Prouver que cette loi de composition est associative, et prouver que $t \circ \mathrm{id}_F = t$, et $\mathrm{id}_G \circ t = t$. On voit à travers cet exemple que les trois briques de base de théorie des catégories se combinent pour former à leur tour une nouvelle catégorie. Voici un autre exemple de cette ubiquité.

Définition 1.4 (CAT). *On définit la catégorie* CAT*, qui a pour objets les catégories, et pour morphismes les foncteurs.*

Encore une fois, la lectrice intéressée pourra prouver que l'on peut composer les foncteurs de manière associative, et que pour chaque catégorie $\mathcal{C}$ il y a un foncteur identité $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Notez que la définition de CAT n'inclut pas les transformations naturelles. Il existe des manières de le faire en étendant la définition même de ce qu'est une catégorie. Cela nous amène dans le domaine des catégories supérieures, où une catégorie n'est plus constituée seulement d'objets et de liens entre les objets, mais aussi de liens entre les liens, et de liens entre ces liens, etc (jusqu'à même l'infini). Rien que la définition de tels objets est un thème de recherche actuel en théorie des catégories [RV16].

Finalement, nous terminons cette section sur les briques de bases par la notion d'isomorphisme. Un isomorphisme entre deux choses est une manière de dire qu'elles sont égales, sans vraiment qu'elles soient les mêmes. Prouver un théorème pour une chose, le prouve aussi pour une autre chose qui lui est isomorphe. Lisez isomorphe par *égales avec seul le nom de différent.*

Définition 1.5. *Deux choses a, b, sont* isomorphes *s'il existe $f : a \to b$ et $g : b \to a$ tels que*

$$g \circ f = \mathrm{id}_a$$

et

$$f \circ g = \mathrm{id}_b$$

On peut alors noter $f^{-1} = g$, *ou bien* $g^{-1} = f$, *et on dit que* f *et* g *sont des* isomorphismes.

1.2 Vers les limites et colimites

Nous construisons sans cette section tout l'outillage nécessaire pour aboutir aux notions de limites et colimites.

1.2.1 Catégorie opposée

Définition 1.6 (Catégorie opposée)**.** *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie. On définit la* catégorie opposée *de* $\mathcal{C}$, *notée* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, *par*

— $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$

— *Pour tout* $a, b \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b)$ *est* $\mathcal{C}(b,a)$

En quelque sorte, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ est la catégorie $\mathcal{C}$, mais vue dans le miroir. Si l'on a les liens suivants dans $\mathcal{C}$

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c$$

alors ce diagramme se traduira dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ par

$$a \longleftarrow b \longleftarrow c$$

Le concept de catégorie opposée est extrêmement important, et permet de dualiser n'importe quelle construction. Nous allons voir un premier exemple de dualité à travers le concept de produit et coproduit. Un coproduit sera un produit dans la catégorie opposée. Plus généralement, si l'on a construit la notion X dans n'importe quelle catégorie, alors on peut dualiser cette construction, et en obtenir une nouvelle, que l'on pourra nommer coX, si elle est d'intérêt. Il en va de même pour les théorèmes. Si l'on prouve un théorème pour la construction X, alors le même théorème (à renversement des liens près), sera vrai pour la construction coX. Un très bel exemple de cette dualité est le théorème suivant, qui est un avant-goût de la partie sur les adjonctions.

Théorème 1.1.

1. *Les adjoints à droite préservent les limites*
2. *Les adjoints à gauche préservent les colimites*

On aurait pu nommer les *adjoints à gauche* par *adjoints à codroite* (ce n'est pas la terminologie retenue, mais c'est moralement vrai), et ainsi prouver que les adjoints à droite préservent les limites est la même chose de dire que les adjoints à codroite préservent les colimites, deux théorèmes pour le prix d'un.

1.2.2 Produits et coproduits

Avant d'introduire les notions de limites et colimites, nous allons définir celle de produits et coproduits. Le produit est une instance particulière de la construction de limite, de même le coproduit est un type de colimite. Nous fixons pour la suite une catégorie $\mathcal{C}$.

Définition 1.7 (Produit)**.** *Soient* $a, b \in \mathcal{C}$. *Un* produit *de* a *et* b *est la donnée*

— *d'un objet de* $\mathcal{C}$, *noté* $a \times b$

— *de deux morphismes (appelé les projections)* $\pi_a : a \times b \to a$ *et* $\pi_b : a \times b \to b$

tels que pour tout objet $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ et pour tous morphismes $f \in \mathcal{C}(c,a)$ et $g \in \mathcal{C}(c,b)$, il existe un unique morphisme $u \in \mathcal{C}(c, a \times b)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "\pi_a"] \arrow[r, "\pi_b"'] & b \end{tikzcd}$$

commute, donc tel que $\pi_a \circ u = f$ et $\pi_b \circ u = g$.

Définition 1.8 (Coproduit)**.** *Soient $a, b \in \mathcal{C}$. Un* coproduit *de a et b est la donnée*

- *d'un objet noté $a + b$*
- *de deux morphismes (appelé les injections) $\iota_a : a \to a + b$ et $\iota_b : b \to a + b$*

tels que pour tout objet $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ et pour tous morphismes $f \in \mathcal{C}(a,c)$ et $g \in \mathcal{C}(b,c)$, il existe un unique morphisme $u \in \mathcal{C}(a+b, c)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\iota_a"] \arrow[dr, "f"'] & a + b \arrow[d, dashed, "u"] & b \arrow[l, "\iota_b"'] \arrow[dl, "g"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

commute, donc tel que $u \circ \iota_a = f$ et $u \circ \iota_b = g$.

Nous observons que la construction du coproduit est le miroir de celle du produit. Nous avons en effet la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Soient $a, b \in \mathcal{C}$. Si l'objet $d \in \mathcal{C}$ est le produit de a et b dans $\mathcal{C}$, alors l'objet d est le coproduit de a et b dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. De plus, si $\pi_a : d \to a$ et $\pi_b : d \to b$ sont les projections associées au produit dans $\mathcal{C}$, alors ces mêmes flèches sont les injections pour le coproduit dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.*

Notez que vu que la catégorie opposée renverse le sens des flèches, les injections pour le coproduit dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ sont bien dans le bon sens.

Remarque 1.1. *Dans la catégorie* Sets*, la construction du produit est celle du produit cartésien usuel $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$. La construction du coproduit est celle de la somme direct. Dans la catégorie où les objets sont les nombres entiers et où l'on a une unique flèche de n vers m si et seulement si $n \leq m$, alors $n \times m$ est $\min(n,m)$, tandis que $n + m$ est $\max(n,m)$. Dans la catégorie où les objets sont les nombres entiers positifs et où l'on a une unique flèche de n vers m si et seulement si n divise m alors $n \times m$ est $\mathrm{pgcd}(n,m)$, tandis que $n + m$ est $\mathrm{ppcm}(n,m)$. La lectrice est invitée à vérifier de telle affirmations.*

Remarque 1.2. *Un produit (ou un coproduit) n'existe pas nécessairement dans une catégorie donnée.*

1.2.3 Cônes et cocônes

Définition 1.9 (Objet initial et terminal)**.** *Un objet $i \in \mathcal{C}$ est* initial *si pour tout $a \in \mathcal{C}$, il existe une unique flèche $!_a : i \to a$. Par dualité, un objet $t \in \mathcal{C}$ est* terminal *si pour tout $a \in \mathcal{C}$, il existe une unique flèche $!_a : a \to t$.*

Définition 1.10 (Diagramme)**.** *Soit $\mathcal{J}$ une catégorie. Un foncteur $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ est aussi appelé un* diagramme *en $\mathcal{C}$ de forme $\mathcal{J}$.*

Ce changement de terminologie reflète une utilisation. La catégorie $\mathcal{J}$ est souvent petite par rapport à $\mathcal{C}$ (dans sens intuitif mais aussi le vrai sens technique du terme), et un diagramme doit se voir comme une sous partie de la catégorie $\mathcal{C}$, qui a la forme de la catégorie $\mathcal{J}$. Par exemple si $\mathcal{J}$ est la catégorie avec uniquement deux objets et aucun morphismes hormis les identités, alors un diagramme $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ est la donnée de deux objets dans $\mathcal{C}$. Une catégorie où il n'y a pas d'autres morphismes que les identités s'appelle une catégorie *discrète*.

Définition 1.11 (Foncteur diagonal)**.** *Soit $\mathcal{J}$ une catégorie. On définit le* foncteur diagonal *$\Delta : \mathcal{C} \to [\mathcal{J}, \mathcal{C}]$ de la manière suivante. Pour chaque $c \in \mathcal{C}$, on définit le foncteur constant $\Delta(c) \in [\mathcal{J}, \mathcal{C}]$ par*

$$\begin{aligned} \Delta(c) : \mathcal{J} &\to \mathcal{C} \\ i &\mapsto c \\ i \xrightarrow{u} j &\mapsto \mathrm{id}_c \end{aligned}$$

et pour chaque flèche $f : c \to d$, on définit la transformation naturelle $\Delta(f) : \Delta(c) \to \Delta(d)$ par

$$\Delta(f)_i = f$$

Le foncteur diagonal peut se voir comme une manière de transporter la catégorie $\mathcal{C}$ au sein de la catégorie $[\mathcal{J}, \mathcal{C}]$. Par exemple, si l'on considère la catégorie discrète des nombres entiers $\mathbb{N}$, et $\mathcal{J}$ la catégorie discrète à quatre points, alors le foncteurs diagonal $\Delta : \mathbb{N} \to [\mathcal{J}, \mathbb{N}]$ peut se voir comme le foncteur qui prend un nombre entier n et renvoie le tuple (n, n, n, n) (qui peut lui-même se voir comme foncteur de $\mathcal{J}$ vers $\mathbb{N}$).

Définition 1.12 (Cône et cocône)**.** *Soit $\mathcal{J}$ une catégorie et $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagramme. Un* cône *de sommet $c \in C$ est une transformation naturelle $t : \Delta(c) \to D$. Par dualité, un* cocône *de sommet $c \in \mathcal{C}$ est une transformation naturelle $t : D \to \Delta(c)$.*

Comme le nom l'indique, la bonne manière de se représenter un cône est par un cône (l'objet géométrique en trois dimensions). Au sommet de ce cône l'objet c, ou plus formellement son transport diagonal $\Delta(c)$. À la base de ce cône, la sous partie de $\mathcal{C}$ qui a la forme de $\mathcal{J}$. Supposons que la catégorie $\mathcal{J}$ soit la catégorie suivante, avec quatre objets nommés i, j, k, l et quatre morphismes nommés ik, kl, jl, ij, comme sur le schema suivant.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "kl"] & l \\ i \arrow[u, "ik"] \arrow[r, "ij"'] & j \arrow[u, "jl"'] \end{tikzcd}$$

(avec disons $jl \circ ij = kl \circ ik$). Alors un diagramme $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ est la donnée suivante (qui vit dans la catégorie $\mathcal{C}$).

$$\begin{tikzcd} D(k) \arrow[r, "D(kl)"] & D(l) \\ D(i) \arrow[u, "D(ik)"] \arrow[r, "D(ij)"'] & D(j) \arrow[u, "D(jl)"'] \end{tikzcd}$$

Un cône $t : \Delta(c) \to D$, de base $c \in C$ peut alors être représenté par le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[dll, dashed, "t_i"'] \arrow[dl, dashed, "t_k"] \arrow[d, dashed, "t_j"] \arrow[dr, dashed, "t_l"] & \\
 & D(k) \arrow[rr] & & D(l) \\
D(i) \arrow[ur] \arrow[rr] & & D(j) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Cet objet vit au sein de $\mathcal{C}$. Un cocône serait donc

$$\begin{tikzcd}
 & D(k) \arrow[rr] \arrow[ddr, dashed, "t_k"] & & D(l) \arrow[ddl, dashed, "t_l"] \\
D(i) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[drr, dashed, "t_i"'] & & D(j) \arrow[ur] \arrow[d, dashed, "t_j"] & \\
 & & c &
\end{tikzcd}$$

Définition 1.13 (Morphismes de cônes)**.** *On fixe un diagramme $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Soient $t : \Delta(c) \to D$ et $s : \Delta(c') \to D$ deux cônes. Un* morphisme de cônes *$\psi : t \to s$ est la donnée d'une flèche $\psi : c \to c'$, telle que pour tout $i \in \mathcal{J}$, le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "t_i"'] & & c' \arrow[dl, "s_i"] \\
 & D(i) &
\end{tikzcd}$$

On a évidemment la notion de morphisme de cocône en reversant les flèches du diagramme précédent. Un morphisme de cône permet de passer d'un cône à l'autre, comme le suggère le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "\psi"] \arrow[dl, dotted] \arrow[d, dotted] \arrow[drr, dotted] \arrow[dr, dotted] & c' \arrow[dll, dashed] \arrow[dl, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\
 & D(k) \arrow[rr] & & D(l) \\
D(i) \arrow[ur] \arrow[rr] & & D(j) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Les conditions de commutation dans la définition précédente s'assurent que tous les triangles de la forme

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted] & & c' \arrow[dl, dashed] \\
& {} &
\end{tikzcd}$$

commutent.

La lectrice attentive notera que dans la définition nous avons dit *Un morphisme de cônes $\psi : t \to s$ est la donnée d'une flèche $\psi : c \to c'$*. Comment peut on avoir $\psi : t \to s$, (qui est un morphisme de transformations naturelles) mais aussi $\psi : c \to c'$ (qui est un morphisme de $\mathcal{C}$) ? Ces deux choses ne vivent pas du tout dans le même monde et pourtant nous les nommons de la même manière. C'est une procédure courante en théorie des catégories. Si deux choses représentent les mêmes données, alors nous les noterons de la même manière, et nous faisons confiance à l'utilisatrice pour considérer la bonne version selon le contexte.

Finalement, avant de dire ce que sont les limites et colimites, on remarque qu'étant donné un diagramme $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, on peut former la catégorie des cônes où les objets sont les cônes $t : \Delta(c) \to \mathcal{D}$ (pour tout $c \in \mathcal{C}$) et les flèches sont les morphismes de cône. Il en va de même pour les cocônes.

1.2.4 Limites et colimites

Définition 1.14 (Limites et colimites)**.** *Une* limite *d'un diagramme $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ est un objet terminal dans la catégorie des cônes associée à D. Une* colimite *d'un diagramme $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ est un objet initial dans la catégorie des cocônes associée à D. On note* $\lim D$ *et* $\operatorname{colim} D$ *ces constructions. On note aussi parfois abusivement* $\lim D$ *la base l du cône limite, mais la limite est bien la donnée de la base l du cône, et de la transformation naturelle $t : \Delta(l) \to D$.*

Reprenons le diagramme $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ suivant

$$\begin{tikzcd}
D(k) \arrow[r, "D(kl)"] & D(l) \\
D(i) \arrow[u, "D(ik)"] \arrow[r, "D(ij)"'] & D(j) \arrow[u, "D(jl)"']
\end{tikzcd}$$

La limite de ce diagramme est un cône $t : \Delta(l) \to D$ avec comme base un certain $l \in \mathcal{C}$. C'est-à-dire que l'on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
& D(k) \arrow[rrr] & & & D(l) \\
& & l \arrow[ul, dotted, "t_k"] \arrow[urr, dotted, "t_l"] \arrow[dll, dotted, "t_i"] \arrow[dr, dotted, "t_j"] & & \\
D(i) \arrow[uur] \arrow[rrr] & & & D(j) \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Ce cône est le *plus proche* du diagramme D dans le sens où, pour tout autre cône $s : \Delta(c) \to D$, on dispose d'un unique morphisme de cône $\psi : s \to t$, autrement dit le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
& & c \arrow[dl, dotted, "s_k"'] \arrow[drr, dotted, "s_l"] \arrow[dddll, dotted, "s_i"'] \arrow[dddr, dotted, "s_j"] \arrow[dd, dashed, "\psi"] & & \\
& D(k) \arrow[rrr] & & & D(l) \\
& & l \arrow[ul, dotted, "t_k"] \arrow[urr, dotted, "t_l"'] \arrow[dll, dotted, "t_i"] \arrow[dr, dotted, "t_j"'] & & \\
D(i) \arrow[uur] \arrow[rrr] & & & D(j) \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.2. *Les limites sur la catégorie discrète à deux éléments sont les produits, et les colimites sont les coproduits.*

Démonstration. Un diagramme $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, où $\mathcal{J}$ est discrète à deux éléments, est simplement la donnée de deux objets $a, b \in \mathcal{C}$. Un cône est la donnée d'un point de base $c \in \mathcal{C}$ et de deux flèches $p_a : c \to a$ et $p_b : c \to b$. Un cône limite est donc la donnée d'un objet de base, appelons-le $a \times b$, et de deux flèches $\pi_a : a \times b \to a$ et $\pi_b : a \times b \to b$, telle que pour tout autre cône (donc pour tout autre objet c, et flèches $p_a \in \mathcal{C}(c, a)$, $p_b \in \mathcal{C}(c, b)$), on ait une unique flèche $\psi : c \to a \times b$, tel que

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "p_a"'] \arrow[d, dashed, "\psi"] \arrow[dr, "p_b"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "\pi_a"] \arrow[r, "\pi_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

commute (car ψ est un morphisme de cônes). La preuve pour les coproduits est par dualité. $\square$

On parle bien souvent du produit, de la limite, de l'objet initial, etc. Cette terminologie est justifiée par le fait que ces constructions sont unique à isomorphisme près. En pratique, cela implique que l'on peut identifier toutes les limites d'un même diagramme, et qu'il n'y a pas de manière interne de les distinguer. Dorénavant, nous parlerons donc de la limite, ou du coproduit, etc (au lieu de dire une limite, ou un coproduit).

Terminons cette section par un peu d'ubiquité.

Proposition 1.3. *Les objets initiaux sont des colimites et les objets terminaux des limites.*

Démonstration. Si l'on prend $\mathcal{J} = \emptyset$, la catégorie sans objets, alors un diagramme $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ est la donné de rien du tout. Un cône est un objet $c \in \mathcal{C}$ avec une transformation naturelle $t : \Delta(c) \to D$. Cette transformation naturelle n'a aucune composante car $\mathcal{J}$ n'a pas d'objet, on peut donc l'oublier. Un cône est donc simplement un objet $c \in \mathcal{C}$. Un cône limite est un objet $l \in \mathcal{C}$, tel que pour tout autre cône (donc tout autre objet c), on ait un unique morphisme de cône (donc simplement une flèche dans $\mathcal{C}$) $\psi : c \to l$. $\square$

Ainsi, on définit la notion de limite via les objets initiaux, et l'on se rend ensuite compte que l'on peut particulariser la notion de limite pour retrouver celle d'objet initial.

1.3 Foncteurs adjoints

Les adjonctions sont de partout. C'est avec le développement de ce concept que la théorie des catégories est devenue un domaine scientifique à part entière, plutôt que de simples gadgets d'écriture [Mac71].

1.3.1 Définition par les foncteurs hom

Il existe beaucoup de définitions de l'adjonction. La notre commence par deux foncteurs de direction opposée. Nous fixons deux catégories quelconques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, un foncteur $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, et un foncteur $L : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. L'image est la suivante :

$$L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$$

Définition 1.15 (Adjonctions)**.** *On dit (selon le contexte qui nous intéresse) que*

- *R est l'*adjoint à droite *de L*
- *ou que, L est l'*adjoint à gauche *de R*
- *ou que, R admet L comme* adjoint à gauche
- *ou que, L admet R comme* adjoint à droite

et on écrit $L \dashv R$, ou $R \vdash L$, lorsqu'il existe pour chaque $c \in \mathcal{C}$ et chaque $d \in \mathcal{D}$, un isomorphisme

$$\psi_{c,d} : \mathcal{C}(c, R(d)) \simeq \mathcal{D}(L(c), d)$$

Par ailleurs, ces isomorphismes doivent être naturels en c et en d. Cela signifie qu'à $c \in \mathcal{C}$ fixé,

$$\psi_{c,\text{-}} : \mathcal{C}(c, R(\text{-})) \simeq \mathcal{D}(L(c), \text{-})$$

est une transformation naturelle, et qu'à $d \in \mathcal{D}$ fixé,

$$\psi_{\text{-},d} : \mathcal{C}(\text{-}, R(d)) \simeq \mathcal{D}(L(\text{-}), d)$$

en est aussi une.

La naturalité de ces isomorphismes n'est pas nécessaire pour comprendre la notion d'adjonction, elle est plutôt là pour s'assurer que le concept ainsi défini ai bien un comportement catégorique, comme pour lubrifier les engrenages en quelque sorte. L'adjonction est donc un pouvoir permettant de convertir des flèches selon les règles suivantes.

$$\frac{c \to R(d)}{L(c) \to d} \qquad\qquad \frac{L(c) \to d}{c \to R(d)}$$

FIGURE 1 – Règles de l'adjonction

C'est-à-dire que la donnée d'une flèche $c \to R(d)$ se transforme en la donnée d'une flèche $L(c) \to d$, et inversement, le tout sans perte d'information et tel que ces transformations soient inverses l'une de l'autre.

1.3.2 La naturalité de l'isomorphisme

Il y a même mieux, la naturalité de l'isomorphisme permet de faire ces transformations en préservant la commutativité de certains diagrammes.

Proposition 1.4. *Soit $f : c \to c'$ dans $\mathcal{C}$. On peut passer de*

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ R(c) \arrow[rr, "R(f)"'] & & R(c') \end{tikzcd}$$

à

$$\begin{tikzcd} & L(d) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ c \arrow[rr, "f"'] & & c' \end{tikzcd}$$

en préservant la commutativité des diagrammes invoqués. De même, pour $g : d \to d'$ dans $\mathcal{D}$, on peut passer de

$$\begin{tikzcd} L(d) \arrow[rr, "L(g)"] \arrow[dr] & & L(d') \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

à

$$\begin{tikzcd} d \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & d' \arrow[dl] \\ & R(c) & \end{tikzcd}$$

en préservant la commutativité des diagrammes invoqués.

Pour se souvenir du sens des choses, on pourra se rappeler que l'adjoint à gauche va à gauche de la flèche, et l'adjoint à droite va à droite.

1.3.3 L'unité et la counité

Reprenons maintenant l'isomorphisme

$$\psi_{c,d} : \mathcal{C}(c, R(d)) \simeq \mathcal{D}(L(c), d)$$

et instancions-le en $c = R(d)$. Nous avons donc

$$\psi_{R(d),d} : \mathcal{C}(R(d), R(d))) \simeq \mathcal{D}(L \circ R(d), d)$$

Dans $\mathcal{C}(R(d), R(d))$, il y a toujours un morphisme, l'identité $\mathrm{id}_{R(d)} : R(d) \to R(d)$. Ce morphisme peut donc se transformer selon la règle de la Figure 1, et donner une flèche $L \circ R(d) \to d$. Appelons cette flèche ε_d. Formellement, $\varepsilon_d = \psi_{R(d),d}(\mathrm{id}_{R(d)})$. De même,

$$\psi_{c,L(c)} : \mathcal{C}(c, R \circ L(c))) \simeq \mathcal{D}(L(c), L(c))$$

et l'on nomme $\eta_c = \psi^{-1}_{c,L(c)}(\mathrm{id}_{L(c)})$, la transformation de la flèche $id_{L(c)} : L(c) \to L(c)$, par la règle de la Figure 1

Définition 1.16. *La transformation naturelle $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to R \circ L$ s'appelle l'*unité *de l'adjonction et $\varepsilon : L \circ R \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ la* counité *de l'adjonction.*

La lectrice intéressée pourra vérifier que ces données forment effectivement des transformations naturelles entre les foncteurs invoqués.

Théorème 1.2 (Identités triangulaires)**.** *Si $L \dashv R$, d'unité η et de counité ε, alors*
- $(\varepsilon L) \circ (L\eta) = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$
- $(R\varepsilon) \circ (\eta R) = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$

Ce théorème suppose que l'on puisse composer une transformation naturelle et un foncteur, ce qui est tout à fait possible. Le diagramme suivant suggère une telle opération.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=60, "G"] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow t"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Il est possible de créer la transformation naturelle

$$tF : G \circ F \to H \circ F$$

en définissant $(tF)_c = t_{F(c)}$. De même, pour

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "G"] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow t"] & \mathcal{D} \arrow[r, "F"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

On définit

$$Ft : F \circ G \to F \circ H$$

par $(Ft)_c = F(t_c)$. Encore une fois, la lectrice est invitée à vérifier que cela créé bien des transformations naturelles.

Théorème 1.3. *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories,*

$$L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$$

deux foncteurs, et soient $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to R \circ L$ et $\varepsilon : L \circ R \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ deux transformations naturelles. Alors $L \dashv R$ si et seulement si les identités triangulaires du Théorème 1.2 *sont vérifiées.*

Ainsi, une adjonction est en particulier entièrement déterminée par son unité et sa counité.

1.3.4 RAPL

Théorème 1.4.
1. *Les adjoints à droite préservent les limites*
2. *Les adjoints à gauche préservent les colimites*

En particulier, si R admet un adjoint à gauche, alors $R(a \times b) = R(a) \times R(b)$. De même, si L est adjoint à gauche $L(a + b) = L(a) + L(b)$. En revanche, un foncteur préservant les limites n'est pas forcément adjoint à droite, cette condition n'est pas suffisante, uniquement nécessaire. Il existe des théorèmes sur l'existence d'adjoints, et la lectrice intéressée est invitée à utiliser les mots clefs *adjoint functor theorem*. Concluons cette section avec encore de l'ubiquité.

Théorème 1.5. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{J}$ une catégorie de diagramme. On note $\Delta : \mathcal{C} \to [\mathcal{J}, \mathcal{C}]$ le foncteur diagonal. On a alors les adjonctions suivantes.*

$$\operatorname{colim} \dashv \Delta \dashv \lim$$

Notez que l'on avait uniquement définit $\lim D$, pour un diagramme $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. En fait, on peut faire un foncteur

$$\lim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \to \mathcal{C}$$

qui à chaque diagramme $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ associe la base du cône limite $\lim D$. Si $\lim D$ est simplement un objet de $\mathcal{C}$, où est passée la transformation naturelle associée à la limite ? En effet une limite est la donné de la base l du cône et de la transformation naturelle $t : \Delta(l) \to D$. Elle se situe dans la counité de l'adjonction en D. En effet

$$\varepsilon_D : (\Delta \circ \lim)(D) \to \mathrm{id}(D)$$

est bien la transformation naturelle

$$\varepsilon_D : \Delta(l) \to D$$

où l est la base du cône limite.

Notez par ailleurs qu'on a une tour d'adjonctions similaire $\mathrm{Lan}_K \dashv K^* \dashv \mathrm{Ran}_K$ chez les extensions de Kan. Qui préserve les limites déjà, les adjoints à gauche ou à droite ? Voici un RAPL :

Right Adjoints Preserve Limits.

1.4 Tout est une extension de Kan

Les extensions de Kan subsument toutes les constructions que nous avons vues jusqu'à présent. Les extensions de Kan sont des foncteurs qui essayent de faire commuter au mieux les diagrammes.

1.4.1 Définition

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ trois catégories. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ et $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ des foncteurs, comme sur le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "K"'] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

Est-il possible de trouver un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ tel que $G \circ K = F$, donc tel que le diagramme suivant commute ?

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "K"'] & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

La réponse est en général non, pour l'intuiter, imaginons que la catégorie $\mathcal{D}$ soit $\mathbf{1}$, une catégorie avec un seul objet, et un seul morphisme (l'identité). Le foncteur K doit donc envoyer toute l'information de $\mathcal{C}$ dans ce simple objet, où elle est perdue. On ne peut pas espérer qu'un foncteur $G : \mathbf{1} \to \mathcal{E}$ puisse retrouver toute la nuance du foncteur F. Ce que l'on peut faire par contre, c'est demander le *meilleur* foncteur G qui fasse le travail. Dans le cas où $\mathcal{D} = \mathbf{1}$, il se trouve que G est le foncteur colim (ou lim). Les extensions de Kan sont des manières de trouver le meilleur foncteur répondant à une situation donnée.

Définition 1.17 (Extension de Kan). *L'extension de Kan à gauche de F le long de K est la donnée d'un foncteur de $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$, appelé $\mathrm{Lan}_K(F)$ et d'une transformation naturelle $\alpha : F \to \mathrm{Lan}_K(F) \circ K$ vérifiant la propriété universelle suivante. Pour tout autre foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ et toute autre transformation naturelle $\beta : F \to G \circ K$, il existe une unique transformation naturelle $\hat{\beta} : \mathrm{Lan}_K(F) \to G$ telle que*

$$\beta = (\hat{\beta}K) \circ \alpha$$

Nous avons donc le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "K"'] \arrow[drr, bend left, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow \alpha"] \arrow[ddr, phantom, "\Rightarrow \beta"] & & \\
\mathcal{D} \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Lan}_K(F)"] \arrow[rr, bend right, "G"'] & \arrow[phantom, "\Downarrow \hat{\beta}"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

Notez qu'il existe la notion duale, d'extension de Kan à droite, où les flèches des transformations naturelles sont renversées.

1.4.2 Formule de la colimite

Il est possible de calculer les extensions de Kan, grace à la formule de la colimite. Pour cela, nous introduisons une nouvelle notion fondamentale, les catégories virgules.

Définition 1.18. *Si $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $d \in \mathcal{D}$, on note $d \downarrow K$ la catégorie où les objets sont les paires $(c, f : d \to K(c))$ et un morphisme $h : (c, f) \to (c', f')$ est un morphisme $h : c \to c'$ dans $\mathcal{C}$ tel que*

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
K(c) \arrow[rr, "K(h)"'] & & K(c')
\end{tikzcd}$$

commute, donc tel que $f \circ K(h) = f'$.

Remarque 1.3. *Dans le cas où $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ et $K = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, la catégorie $d \downarrow K$ s'appelle la cotranche en d de $\mathcal{C}$, notée $d/\mathcal{C}$ et de manière duale on a la tranche en d de $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{C}/d$, où les objets sont les morphismes $f : c \to d$, et un morphisme $h : (c, f) \to (c', f')$ est un morphisme dans $h : c \to c'$ dans $\mathcal{C}$ tel que*

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & c' \arrow[dl, "f'"] \\
 & d &
\end{tikzcd}$$

commute.

On fixe maintenant une catégorie virgule $d \downarrow K$. Nous disposons d'un foncteur canonique

$$\pi_d : d \downarrow K \to \mathcal{C}$$

qui envoie un objet $(c, f : K(c) \to d)$ sur c et un morphisme $h : (c, f) \to (c', f')$ sur le morphisme sous-jacent $h : c \to c'$. Nous avons donc le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
d \downarrow K \arrow[rr, "\pi_d"] & & \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[d, "K"'] & & \mathcal{E} \\
& & \mathcal{D} \arrow[urr, "\mathrm{Lan}_K(F)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Notez que le triangle ne commute pas, en général $\mathrm{Lan}_K(F) \circ K \neq F$.

Théorème 1.6. $\mathrm{colim}(F \circ \pi_d) = \mathrm{Lan}_K(F)(d)$

$\mathrm{Lan}_K(F)$ est un foncteur de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$, on aimerai donc savoir sur quel objet il envoie $d \in \mathcal{D}$. Cet objet est calculé par la formule de la colimite. Il y a une formule similaire avec les extensions de Kan à droite, où la colimite est notamment remplacée par une limite.

1.4.3 Tout est une extension de Kan

Les extensions de Kan généralisent tout ce que l'on a vu auparavant. Par exemple, si $D : \mathcal{J} \to \mathcal{E}$ est un diagramme, alors on peut utiliser les extensions de Kan pour calculer la colimite de $\mathcal{D}$. On note $\mathbf{1}$ la catégorie avec un seul objet, noté $\star$, et un seul morphisme (la lectrice pourra vérifier que c'est l'objet terminal de CAT définie plus tôt). On a l'unique foncteur $! : \mathcal{J} \to \mathbf{1}$ qui envoie tout sur l'unique objet de $\mathbf{1}$. L'extension de Kan à gauche de D le long de ! est la colimite de D. Autrement dit,

$$\mathrm{colim}(D) = \underset{!}{\mathrm{Lan}}(D)(\star)$$

La lectrice intéressée pourra faire la preuve en remarquant que c'est la simple application de la formule de la colimite, et que la catégorie $\star \downarrow !$ fonctionne comme une copie de $\mathcal{J}$. Par ailleurs, l'extension de Kan à droite donne la limite, $\lim(D) = \mathrm{Ran}_!(D)$.

Par ailleurs, les adjonctions sont aussi des extensions de Kan. Supposons que l'on ai un foncteur $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, alors l'extension de Kan à gauche de $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ le long de L est l'adjoint à droite de L. C'est-à-dire que

$$L \dashv \underset{L}{\mathrm{Lan}}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$$

Pour terminer, nous voulons préciser à la lectrice que toute ces constructions sont valides sous conditions qu'elles existent. L'adjoint, la colimite, le produit, l'extension de Kan, toutes ces constructions n'existent pas à priori, et il faut d'abord démonter leur existence avant de les considérer. Dans certaines catégories, l'existence est automatique, et nous supposerons toujours que les constructions considérées existent.

2 Aspects établis : les préfaisceaux et les topos

Nous présentons ici un chapitre qui encense le pouvoir expressif de outils présentés précédemment. À travers le concept catégorique de préfaisceaux, et plus généralement celui de topos, il est possible de donner vie entièrement aux fondements des mathématiques constructives modernes. Ce chapitre utilise librement les notions présentées au chapitre précédent, ou du moins l'idée de leur existence. Par ailleurs, il alterne entre présentations technique et poético-intuitive des notions afin que chaque lectrice puisse en retirer un quelque chose. La lectrice qui ne souhaite pas entrer dans les détails est invité à lire en diagonal les passages techniques et au contraire d'insister sur les parties qui ne le sont pas. Nous avons surtout décidé d'inclure ce chapitre dans une démarche démonstrative, afin de prouver que les outils catégoriques sont expressifs de la structure dans les domaines des mathématiques les plus poussés et abstraits, et ainsi de renforcer l'idée d'une possibilité d'application à des structures de natures différentes.

2.1 Voyage au pays de préfaisceaux

Nous essayons de donner un exposé sommaire et concis de la notion de préfaisceaux et du lemme de Yoneda. La lectrice voulant plus de détail est invitée à consulter les notes de l'auteure (disponible sur son site), qui donnent une version plus complète avec plus d'exemples de cette partie.

2.1.1 Ce que sont les préfaisceaux

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (localement petite). Un préfaisceau est un foncteur $X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$, donc la donnée

— d'un ensemble $X(c)$, pour chaque objet $c \in \mathcal{C}$

— d'une fonction (ensembliste) $X(f) : X(d) \to X(c)$, pour chaque flèche $f : c \to d$

Cette construction est fonctorielle, ce qui veux dire que lorsqu'on a

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] & d \\ b \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

on a alors que

$$\begin{tikzcd} X(c) \arrow[d, "X(f)"'] & X(d) \arrow[l, "X(g)"'] \arrow[dl, "X(g\circ f)"] \\ X(b) & \end{tikzcd}$$

commute. Les flèches sont renversées car nous partons de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, et non de $\mathcal{C}$. De plus, pour tout $d \in \mathcal{C}$, $X(\mathrm{id}_d) = \mathrm{id}_{X(d)}$. Dans le cas où la catégorie $\mathcal{C}$ est discrète, un préfaisceau est simplement un tas d'ensembles indexés par les objets de $\mathcal{C}$. Donc une bonne intuition pour la notion de préfaisceaux est celle d'ensembles indexés, compatibles avec des liens que pourraient avoir les index entre eux. Prenons l'exemple où la catégorie est $\mathbb{N}$ avec un unique morphisme, appelé $n \leq m$, lorsque n est plus petit (ou égal) que m. Un préfaisceau $X : \mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$ est alors

— une collection d'ensembles $X_0, X_1, X_2, \ldots$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$

— une fonction $f_{n,m} : X_m \to X_n$, lorsque $n \leq m$,

Est-ce là tout ? Non, car il y a aussi la fonctorialité. Écrivons-la dans le cas particulier où $n \leq n+1 \leq n+2$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\begin{tikzcd}
n+1 \arrow[r] & n+2 \\
n \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

donc que

$$\begin{tikzcd}
X_{n+1} \arrow[d, "f_{n,n+1}"'] & X_{n+2} \arrow[l, "f_{n+1,n+2}"'] \arrow[dl, "f_{n,n+2}"] \\
X_n &
\end{tikzcd}$$

commute. Cela veut implique que

$$f_{n,n+2} = f_{n,n+1} \circ f_{n+1,n+2}$$

Et plus généralement, on peut prouver que pour tout $p \geq 0$

$$f_{n,n+p} = f_{n,n+1} \circ f_{n+1,n+2} \circ \cdots \circ f_{n+(p-1),n+p}$$

Cela nous indique que pour définir le préfaisceau X, il suffit de donner les fonctions $f_{n,n+1} : X_{n+1} \to X_n$, et seulement elles, les autres se déduisent par la relation ci-dessus. Ainsi, un préfaisceau est une collection d'ensemble reliée de manière cohérente par des relations fonctionnelles.

Retournons à notre catégorie générale $\mathcal{C}$. Elle est localement petite. Cela veut dire que $\mathcal{C}(c, d)$ forme toujours un ensemble, et cela permet de créer les hom foncteurs contravariants $h_d : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$ (contravariant veut simplement dire que c'est un foncteur où la catégorie de départ est opposée par rapport à celle avec laquelle on travaillait précédemment). Ils sont définis comme suit, pour chaque $d \in \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned}
h_d : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} &\to \mathrm{Sets} \\
c &\mapsto \mathcal{C}(c, d) \\
f : c' \to c &\mapsto \text{-} \circ f
\end{aligned}$$

Pour être plus explicite, si $f : c \to c'$ dans $\mathcal{C}$, alors on peut définir la post-composition par

$$\begin{aligned}
\text{-} \circ f : \mathcal{C}(c', d) &\to \mathcal{C}(c, d) \\
u &\mapsto u \circ f
\end{aligned}$$

comme dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "u \circ f"'] & c' \arrow[r, "u"] & d
\end{tikzcd}$$

Cette construction est fonctorielle grace à l'associativité de la composition.

$$(u \circ f) \circ g = u \circ (f \circ g)$$

À gauche il y a $h_d(g) \circ h_d(f)(u)$ et à droite $h_d(f \circ g)(u)$. Les hom foncteurs sont fondamentaux en théorie des catégories, et le lemme de Yoneda est à propos d'eux. C'est ce que nous allons voir maintenant.

2.1.2 Le lemme de Yoneda

Voici le résultat le plus fondamental en théorie des catégories. Comme une blague, les catégoristes aiment à dire que tous les nouveaux théorèmes ne sont en fait qu'une reformulation de Yoneda.

Nous fixons une catégorie localement petite $\mathcal{C}$, et appelons $\hat{\mathcal{C}} = [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ la catégorie de foncteurs ayant pour objet les préfaisceaux sur $\mathcal{C}$. Pour chaque préfaisceau $X \in \hat{\mathcal{C}}$, le lemme de Yoneda affirme qu'il y a un isomorphisme (naturel en c) entre $\hat{\mathcal{C}}(h_c, X)$ et $X(c)$. Donc que, pour tout $X \in \hat{\mathcal{C}}$ et $c \in C$, on a

$$\varphi_{c,X} : \hat{\mathcal{C}}(h_c, X) \simeq X(c)$$

et qui plus est, les données $(\varphi_{c,X})_{c \in \mathcal{C}, X \in \hat{\mathcal{C}}}$ peuvent être collectées pour fabriquer une transformation naturelle entre deux foncteurs (que nous ne décrirons pas ici). Une fois cela fait, nous construisons le fameux foncteur de Yoneda $\mathbf{y}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : \mathcal{C} &\to \hat{\mathcal{C}} \\ c &\mapsto h_c \\ c \xrightarrow{f} c' &\mapsto f_* \end{aligned}$$

où

$$(f_*)_d : h_c(d) \to h_{c'}(d)$$

est définie par pré-composition comme suit.

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "f \circ u"'] & c \arrow[r, "f"] & c' \end{tikzcd}$$

Le lemme de Yoneda prouve que $\mathbf{y}$ est pleinement fidèle (nous verrons la définition de cette notion plus tard), et par ailleurs cela nous permet de montrer le corollaire suivant, qui décrit la philosophie de Yoneda.

Corollaire 2.1. *Soient $c, d \in C$, alors $\mathbf{y}c \simeq \mathbf{y}d$ si et seulement si $c \simeq d$.*

Le foncteur de Yoneda créé ainsi une copie parfaite de $\mathcal{C}$ à l'intérieur des préfaisceaux $\hat{\mathcal{C}}$. Cela veut dire que deux choses sont les mêmes si et seulement si l'ensemble des choses qui pointent vers elles sont les mêmes. Il existe une version covariante du lemme de Yoneda, avec la même conséquence en remplaçant *pointent vers* par *partent de*. Par ailleurs, le lemme de Yoneda donne une très jolie formule. Pour tout préfaisceau $X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$, on a

$$X \simeq \operatorname{colim} \mathbf{y} \circ \pi$$

où $\pi_X : \int X \to \mathcal{C}$ avec $\int X$ la catégorie ayant pour objet les couples dépendants (c, x) avec $c \in \mathcal{C}$ et $x \in X(c)$ et un morphisme de (c, x) vers (d, y) est un morphisme $f : d \to c$ tel que $X(f)(x) = y$. Le foncteur π_X envoie alors un objet (c, x) de $\int X$ sur c, et un morphisme sur son morphisme de $\mathcal{C}$ sous-jacent. Cette formule veut dire que tout préfaisceau est comme un puzzle où chaque pièce est une application du foncteur de Yoneda.

2.2 La théorie des types homotopiques

2.2.1 Blagues non constructives

"Il y a quelque chose que vous devez savoir sur moi.", "Avez-vous l'heure ? Oui.", "Je connais une blague très drôle". Toute ces phrases sont non-constructives, et sont de la faute du tiers-exclus. Le tiers exclus est une construction tout à fait naturelle, et pourtant lourde de conséquences. Ne pas le prendre pour acquis a permis le développement de la logique constructive [San17], et ultimement, celui de la théorie des types homotopiques [Uni13]. Qui est-il ? C'est le principe suivant.

> Pour toute affirmation P, soit P est vraie, soit la négation de P vraie.

Supposons que le domaine des mathématiques soit en fait celui des blagues. Le travail de la mathématicienne serait alors de prouver des choses sur les blagues, qu'elles sont amusantes, drôles, inutiles, etc. Un jour, une mathématicienne arrive avec le théorème suivant.

Théorème 2.1 (Blague non constructive). *Il existe une blague très drôle.*

En tant que mathématicienne, vous décidez d'examiner la preuve de ce résultat stupéfiant. Au cours de votre lecture, vous tombez sur ce passage.

> Nous racontons donc la blague b_1. Soit tout le monde rigole, auquel cas la blague était très drôle, soit tout le monde ne rigole pas, auquel cas nous utilisons le lemme de la chute pour transformer la fin de la blague b_1 en une blague b_2 qui a un succès comique garanti en cas d'échec de b_1, et donc est très drôle.

Notons R la proposition "tout le monde rigole", et l'on note "une blague b est très drôle" par $D(b)$. Ce que cette preuve nous dit, c'est que si R alors $D(b_1)$, et si "non R" alors $D(b_2)$. Donc forcément si "soit R, soit non R", alors on aura une blague très drôle, mais laquelle ? La blague b_1, ou b_2 ? Imaginons que dans notre panel de testeuses de blagues, il y ai une personne isolée dans une boîte, dont on ne saura jamais si elle rigole ou non, nous savons que cette personne va rigoler soit à b_1, soit à b_2, mais nous ne savons pas à laquelle des deux, rendant notre blague non constructive. Cette situation grotesque est le quotidien des mathématiciennes. Ce que la logique intuitionniste permet de faire, c'est d'éviter ce genre de problème.

2.2.2 La théorie des types

L'isomorphisme de Curry-Howard est une manière de penser fondamentale, qui unifie le concept de preuve mathématique et de programme (ou d'algorithme).

Théorème 2.2 (Isomorphisme de Curry-Howard). *Faire une demonstration, c'est écrire un programme.*

La théorie des types est une manière formelle de faire des mathématiques en rendant explicite cet isomorphisme. Un type est un concept, un quelque chose, nommons le T. Au sein de chaque type, il y a des termes, c'est-à-dire des choses qui ont une petite étiquette indiquant qu'elle fait partie du type. Si t est une chose de type T, on écrira $t : T$. Par exemple,

$$\text{chat} : \text{Animal}$$

Un chat est un terme de type Animal. Rien n'empêche aussi les types d'être considérés comme des termes appartenant à des types d'ordres supérieurs. Cela conduit à la notion d'univers, qui est au centre de l'axiome d'univalence, fondateur de la théorie des types homotopiques. Pour former des nouveaux types et nouveaux termes, on a besoin d'un ensemble de resources déjà construite, on appelle cela le contexte et on le note généralement par Γ. Ainsi on écrira plutôt

$$\Gamma \vdash \text{chat} : \text{Animal}$$

qui s'interprète par : avec l'ensemble des resources du contexte Γ, nous avons pu montrer que chat est un terme de type Animal. Un exemple plus mathématiques pourrait être

$$n : \mathbb{N} \vdash (n+1) : \mathbb{N}$$

En sachant que $n : \mathbb{N}$, alors nous avons pu montrer $(n+1) : \mathbb{N}$.

Une théorie des type est un ensemble de règles pour construire des termes et des types, c'est grace à ces règles que nous pouvons arriver à montrer des jugements tels que ceux précédents. Une théorie des types très utilisé est celle de Martin-Löf [ML84], elle est dite théorie des types dépendants. En voici certaines règles.

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \qquad \Gamma \vdash A = B}{\Gamma \vdash t : B}$$

Celle ci dit que, dès lors qu'avec le contexte Γ il a été possible de montrer $t : A$ et $A = B$, alors nous avons que $t : B$. La suivante nous permet de former le type des fonctions dépendantes.

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B}{\Gamma \vdash (x : A) \to B}$$

Ce nouveau type $(x : A) \to B$ peut se voir comme une fonction qui à un terme $a : A$ renvoie un nouveau type $B(a)$. On dispose de la règle suivante pour construire des termes de ce type.

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A,\ t : (x : A) \to B}$$

Cette règle introduit la notion fondamentale de λ-fonction, qui est couramment utilisée dans les langages de programmation. Voici une dernière règle, qui internalise le principe de récurrence, cher au mathématiques. On suppose que l'on a un type $\mathbb{N}$, avec un terme $0 : \mathbb{N}$ et une fonction $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui représente le successeur (donc moralement l'opération qui envoie n sur $n+1$). Le principe de récurrence peut alors être formulé par la règle suivante.

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash P \qquad \Gamma \vdash a : P(x/0) \qquad \Gamma \vdash b : (n : \mathbb{N}) \to P(x/n) \to P(x/(s\ n))}{\Gamma \vdash \text{natrec}\ a\ b : (x : \mathbb{N}) \to P}$$

Analysons un peu plus en détail cette règle. Il faut voir P comme une proposition mathématique. En théorie des types dépendants, il est possible de montrer que chaque proposition mathématique correspond à un type, et que prouver une théorème mathématique revient à trouver un terme associé à son type (c'est là le cœur de l'isomorphisme de Curry-Howard). L'opération $P(x/0)$ signifie que dans P, on remplace toutes les occurrences (libres) de la variable x par 0. Ainsi

$$\Gamma \vdash a : P(x/0)$$

revient à dire que l'on a prouvé le théorème $P(x)$ pour $x = 0$. De manière analogue

$$\Gamma \vdash b : (n : \mathbb{N}) \to P(x/n) \to P(x/(s\ n))$$

signifie que b est une preuve du fait que si l'on suppose que P est vraie pour une certain n, donc que l'on a $P(x/n)$, alors on est capable de construire un terme de type $P(x/(s\ n))$, c'est-à-dire une preuve que P est vraie pour $s\ n$ (qui est $n+1$). Sous ces hypothèse, nous obtenons grace à la règle, un terme

$$\text{natrec}\ a\ b : (x : \mathbb{N}) \to P$$

qui à tout $x : \mathbb{N}$, renvoie un terme de type $P(x)$, donc une preuve que P est vraie en $x : \mathbb{N}$.

Pour résumer, avec la théorie des types, il est possible d'internaliser le fonctionnement des mathématiques, et chaque propositions mathématique correspond à un type. Faire des maths revient donc à construire des termes d'un certain type.

2.2.3 La théorie des types homotopiques

La théorie des types homotopiques est une théorie des types de Martin-Löf avec un type qui décrit l'égalité de manière particulière. On distingue généralement dans nos théorie des types deux versions de l'égalité. L'une dite définitionnelle et l'autre dite propositionnelle. La première dit que deux choses sont égales parce qu'elle le sont, et il n'y a pas grand choses à dire de plus que ces deux choses sont égales, presque car elles sont syntaxiquement égales, où qu'elles se β-réduisent l'une à l'autre. La β-réduction est un concept fondamental en théorie des types, il simule en quelque sorte la notion de calcul. Intuitivement $1 + 3$ se β-réduit en 4 en applicant les règles de la β-réduction à la fonction $+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Ne rentrons pas plus dans les détails. La lectrice voulant en savoir plus est invitée à consulter des références sur le λ-calcul [Bar81].

L'égalité propositionnelle, de son côté, donne une certaine épaisseur à la notion de similarité. Nous considérons un type A, et nous souhaitons savoir ce que cela pourrait vouloir dire que deux choses a, b de A soient égales. Nous imaginons que A est un espace (au sens intuitif) abstrait et nous allons dire que deux choses sont égales s'il est possible de tracer une chemin entre elles, si nous disposons d'un tel chemin, nous notons $p : \texttt{Path}\ A\ a\ b$, qui signifie que p est un chemin qui relie a et b au sein du type A. Trois conséquences doivent immédiates de cette intuition.

1. Toute chose $a : A$ doit être égale à elle-même. Il suffit de tracer le chemin nul, le chemin qui part de son point de départ et y reste, c'est-à-dire que l'on doit toujours avoir un terme de type $\texttt{Path}\ A\ a\ a$. On note ce terme $\mathrm{id}_a : \texttt{Path}\ A\ a\ a$. C'est la *réflexivité* de l'égalité
2. Si une chose $a : B$ est égale à une autre chose $b : B$, via le chemin $p : \texttt{Path}\ A\ a\ b$, alors on doit pouvoir prendre le chemin l'autre sens pour dire que b est égale à a. On note ce chemin $p^{-1} : \texttt{Path}\ A\ b\ a$. C'est la *symétrie* de l'égalité.
3. Si une chose $a : B$ est égale à une deuxième chose $b : B$, via le chemin $p : \texttt{Path}\ A\ a\ b$, et que cette chose $b : A$ est égale à une troisième chose $c : A$ par $q : \texttt{Path}\ A\ b\ c$, alors on devrait pouvoir suivre le chemin p puis q pour montrer que a est égale à c. On note ce nouveau chemin $p \cdot q : \texttt{Path}\ A\ a\ c$. C'est la *transitivité* de l'égalité.

La lectrice attentive remarquera-là des choses très similaire aux axiomes de catégories. L'identité et la transitivité correspondent respectivement à l'axiome d'identité et de composition. L'axiome de symétrie serait l'équivalent de dire que tous les morphismes de notre catégorie sont des isomorphismes. On dirait alors que notre catégorie est un groupoïde. Mais ce n'est pas tout. Si nous avons $p, q : \texttt{Path}\ A\ a\ b$ deux chemins entre a et b, il est aussi possible de considérer des chemins entre ces chemins $\alpha, \beta : \texttt{Path}\ (\texttt{Path}\ A\ a\ b)\ p\ q$ et encore d'autres chemins entre ces chemins de chemins $t, s : \texttt{Path}\ (\texttt{Path}\ (\texttt{Path}\ A\ a\ b)\ p\ q)\ \alpha\ \beta$, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Nous parlons alors ici d'∞-groupoïde qui sont les objets d'études de base de la théorie des types homotopiques, et cela indique en quoi les ∞-catégories peuvent être d'intérêt dans cette branche des mathématiques.

Ainsi une manière d'étudier le type A est d'étudier l'∞-groupoïde associé à son type d'égalité. Cela se fait par l'étude des chemins, et des chemins entre ces chemins, etc. Or, il existe déjà tout un domaine des mathématiques dont les chemins et les espaces sont les objets d'études. Il s'agit de la théorie de l'homotopie, dont les premiers travaux remontent à Poincaré, et son groupe fondamental pour l'étude des trous. Le groupe fondamental d'un espace est un objet mathématique qui classifie les différents types de lacets qui existent dans cet espace, un lacet étant un chemin d'un point à lui-même. Par exemple, sur un ballon, il n'existe qu'un type de lacet, tandis que sur un donut, il en existe deux. Pour le voir, imaginez toutes les manières de mettre des élastiques *sur* ces surfaces, et dites que deux manières sont égales si vous pouvez passer de l'une à l'autres en déformant l'élastique sans le couper. La théorie des types homotopiques est donc une manière d'appliquer ces travaux en théorie des types et ainsi à la structure même des mathématiques. Les mathématiques dans toute leur généralité sont traitées comme un espace, duquel on étudie des trous abstraits. Il y aurait tant à dire, et la lectrice voulant en savoir plus pourra consulter [Uni13]. Concluons par l'axiome d'univalence.

Axiome 2.1 (Univalence)**.** *Pour tout type $A, B : \mathcal{U}$, on a*

$$(A \simeq B) \simeq (A = B)$$

Autrement dit, l'univalence dit que l'égalité est équivalente à l'équivalence. Son introduction dans la théorie des types homotopiques remonte à Voevodsky [Voe14]. Bien que de prime abord étrange, cet axiome est nécessaire au bon fonctionnement de la théorie, et des travaux récent [CCHM16] ont réussi à lui donner une version constructive, c'est-à-dire un moyen précis et complet de calculer ce que cet axiome (qui n'en est finalement pas un) peut dire pour les types considérés. Pour des besoins de place et simplicité, tout cela reste assez vague, et tous les détails de l'univalence et ses conséquences peuvent être trouvés dans [Uni13].

2.3 Panique dans le topos

2.3.1 Définition

La définition la plus accessible de topos est peut-être la suivante. Nous parlerons de topos, mais la terminologie officielle de l'objet que nous allons définir est topos élémentaire

Définition 2.1 (Topos)**.** *Un* topos *est une catégorie localement cartésienne fermée munie d'un classifieur de sous-objet. Une catégorie localement cartésienne fermée est une catégorie cartésienne fermée où toutes les catégories tranches sont elles-même cartésiennes fermées. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on rappelle (voir Remarque* 1.3*) que la tranche $c \in \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{C}/c$ où les objets sont les morphismes $\cdot \to c$ et les morphismes les triangles commutatifs. Une catégorie est cartésienne fermée si elle dispose d'un objet terminal* $\mathbf{1}$*, de tous les pullbacks, et de toutes les exponentielles. Un pullback est une limite sur un diagramme de la forme $\cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$. L'exponentielle b^a de $a, b \in \mathcal{C}$ est l'application en b de l'adjoint à droite du foncteur $a \times$ - $: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Un classifieur de sous-objets est la donnée de $\Omega \in \mathcal{C}$ et d'une flèche* $\mathrm{true} : \mathbf{1} \to \Omega$ *telle que pour chaque monomorphisme $m : c \rightarrowtail d$, il existe une unique flèche $\chi_m : d \to \Omega$ telle que $d \xleftarrow{m} c \xrightarrow{!_c} \mathbf{1}$ soit le pullback de $d \xrightarrow{\chi_m} \Omega \xleftarrow{\mathrm{true}} \mathbf{1}$. Enfin, une flèche $f : a \to b$ est un monomorphisme si pour toute flèche $u, v : x \to a$, $f \circ u = f \circ v$ implique que $u = v$.*

Bref, panique dans le topos. Le premier a avoir introduit la notion de topos a été Alexandre Grothendieck, qui les qualifia, dans son livre *Récoltes et Semailles* [Gro86], de *métamorphoses profondes la notion d'espace.* Il n'est pas aisé de voir en quoi cet objet à quoi que ce soit à voir avec l'espace. Très grossièrement en mathématiques, l'études des espaces se faisait à travers celle de topologie. Il y avait un espace X avec une forme τ, sa topologie, et les mathématiciennes étudiaient le τ, ce τ était l'espace. Grothendieck eu alors l'idée de changer de point de vue sur ce τ, et de l'étudier non pas pour lui-même, mais à travers des prismes. Les manières de faire ces opérations, et les endroits dans lesquelles elles se déroulaient devinrent elles-mêmes des objets d'intérêts, jusqu'en oublier l'existence même des τ initiaux, et de là émergea le concept de topos. Plus tard, les mathématiciennes se rendirent compte que chaque topos avait ses propres lois de la logique, et que, pour ainsi dire, dans chaque topos il y avait une version des mathématiques. La version des mathématiques induite par les topos de base est celle de la logique intuitionniste, c'est-à-dire celui de la logique classique sans le tiers-exclus.

2.3.2 Les topos pour la théorie des types homotopiques

Essayons de voir ensemble comment les mathématiques internes de certains topos sont ceux de la théorie des types homotopiques avec l'axiome d'univalence. Tout commence par une catégorie de préfaisceaux, et le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Toute catégorie de préfaisceaux est un topos.*

L'objet Ω d'une catégorie de préfaisceaux $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$, est le préfaisceau qui à $c \in \mathcal{C}$ associe

$$\Omega(c) = \{[s] \mid s : S \rightarrowtail \mathbf{y}c\}$$

l'ensemble des classes d'équivalence des sous-foncteurs du foncteur de Yoneda en c. $\Omega(c)$ s'appelle aussi les *sites* sur c. La flèche true : $\mathbf{1} \to \Omega$ est définie en chaque c par

$$\mathrm{true}_c(\star) = [\mathrm{id}_{\mathbf{y}c}]$$

Depuis le modèle simplicial de Voevodsky [KL12], on sait que certaine catégories de préfaisceaux peuvent modéliser la théorie des types homotopiques avec l'univalence. Ce que cela veut dire, c'est que toutes (ou au moins une partie) les règles et constructions des types homotopiques peuvent être simulées dans certaines catégories de préfaisceaux. Voici une très brève idée de comment cette simulation peut avoir lieu. On fixe $\mathcal{E}$ une catégorie de préfaisceaux. Dans notre exemple, on dispose de deux objets particuliers U et E qui sont des préfaisceaux de $\mathcal{E}$, et d'un morphisme $\pi : E \to U$. U représente l'univers, la chose dans laquelle tous les types *vivent*.

— les objets de $\mathcal{E}$ représentent les contextes possibles Γ de notre théorie des types
— un type A en contexte Γ est un morphisme $A : \Gamma \to U$ au sein de $\mathcal{E}$
— un élément $a : A$ en contexte Γ est une flèche $a : \Gamma \to E$ telle que

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "a"] \arrow[d, equal] & E \arrow[d, "\pi"] \\ \Gamma \arrow[r, "A"'] & U \end{tikzcd}$$

commute.

À partir de là, on peut implémenter toutes les constructions de la théorie des types de Martin-Löf. Ensuite, on trouve un objet $\mathbb{I}$, grace à une catégorie de base bien choisie. L'objet $\mathbb{I}$ est un équivalent synthétique de $[0, 1]$, l'ensemble des nombres réels de 0 à 1. On montre ensuite que l'espace des chemins sur le type A se comporte comme le préfaisceau exponentiel $A^{\mathbb{I}}$, qui est intuitivement l'ensemble des morphismes de $\mathbb{I}$ vers A. En effet un chemin de x vers y dans X est, en théorie de l'homotopie classique, une fonction continue $p : [0, 1] \to X$ telle que $p(0) = x$ et $p(1) = y$. On a alors un moyen de simuler nos types `Path - - -` au sein de $\mathcal{E}$.

Plus généralement, on se rend compte que tout ce que l'on vient de faire ici peut se faire en toute généralité dans un topos, pour peu qu'il vérifie une liste d'axiomes supplémentaires [OP16]. Passer par les préfaisceaux n'est donc pas nécessaire. Dire qu'une formule σ est vrai dans un topos, c'est dire que la flèche qui interprète σ grace à la sémantique de Kripke-Joyal se factorise à travers la flèche true. Voyons cela plus en détails. Par formule σ, nous entendons une formule comme par exemple

$$0 \sqcap i = 0 = i \sqcap 0 \;\wedge\; 1 \sqcap i = i = i \sqcap 1$$

Cette dernière est une formule qui s'assure d'une structure importante sur l'objet $\mathbb{I}$ de notre topos. Cette formule appelons la σ, et supposons qu'elle soit en contexte $\mathbb{I} \in \mathcal{E}$. La sémantique de Kripke-Joyal est une manière de transformer cette formule σ, en une flèche $\sigma : \mathbb{I} \to \Omega$ de notre topos tel que le diagramme suivant soit un pullback.

$$\begin{tikzcd} \{i : \mathbb{I} \mid \sigma(i)\} \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbf{1} \arrow[d, tail, "\text{true}"] \\ \mathbb{I} \arrow[r, "\sigma"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

L'objet $\{i : \mathbb{I} \mid \sigma(x)\}$ du topos représente en quelque sorte l'ensemble des $i : \mathbb{I}$ pour lesquelles la formule σ est vraie. Si la formule est vrai, alors intuitivement $\{i : \mathbb{I} \mid \sigma(x)\}$ doit être $\mathbb{I}$ tout entier et $\{i : \mathbb{I} \mid \sigma(x)\} \to \mathbb{I}$ doit être l'identité, ce qui conduirait à dire que

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[d, tail, "\text{true}"] \\ \mathbb{I} \arrow[ur] \arrow[r, "\sigma"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

commute. C'est cela que veut dire que σ est vraie dans $\mathcal{E}$. Montrer cela n'est pas chose aisée pour des formules particulières, et le forcing de Kripke-Joyal (dans des préfaisceaux) [LM94, LS86], puis généralisé dans [AGH21], permet de décomposer et prouver la formule morceaux par morceaux, notamment en considérant des restrictions de contexte $\mathbf{y}c \to \mathbb{I}$, et en applicant la formule de la colimite

$$X \simeq \operatorname{colim} \mathbf{y} \circ \pi$$

vue plus haut.

2.4 Le cardinal inaccessible

Nous allons effectuer une petite digression fondationnelle digne d'intérêt. En examinant [AGH21], nous remarquons l'utilisation d'un cardinal κ, inaccessible. Son nom l'indique bien, dans les mathématiques actuelles, ce cardinal n'est pas atteignable. Nous allons expliquer ce que cela veut dire, en restant assez informelles sur les notations et la rigueur. On rappelle qu'un ensemble est une collection de chose auxquelles on peut se référer.

2.4.1 Très brève théorie des cardinaux

Définition 2.2. *Soit X un ensemble. On note 2^X l'*ensemble des parties *de X.*

Par exemple si $X = \{1, 2, 3\}$, alors

$$2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

La taille de 2^X est 2 à la puissance la taille de X (X a 3 éléments en son sein et 2^X en a $8 = 2^3$, d'où aussi la notation). Cette remarque se généralise aux ensembles infinis, bien que la notion de taille pose beaucoup de problèmes et de question non triviales. L'hypothèse du continu affirme qu'entre les tailles infinies de $\mathbb{N}$ et $2^{\mathbb{N}}$, il n'y a pas d'autres tailles. Cette affirmation est indépendante des les mathématiques *ordinaire*, on ne peut donc pas dire si cela est vrai ou non (modulo évidemment la consistence de ZFC). Un théorème de Cantor affirme :

$$\alpha < 2^\alpha$$

pour toute taille α. C'est-à-dire que chaque ensemble est strictement plus petit que l'ensemble de ses parties. La terminologie mathématique pour *taille* est cardinal. Un cardinal est un objet mathématique (en réalité un ensemble), qui mesure. Par exemple, le nombre 3 est un cardinal, tous les ensembles finis à trois éléments ont le nombre 3 pour cardinal.

Définition 2.3. *Un cardinal κ est dit* inaccessible *s'il est indénombrable et pour tout $\alpha < \kappa$, on a $2^\alpha < \kappa$.*

2.4.2 Atteindre un cardinal inaccessible

En quelque sorte, un cardinal inaccessible est si grand, qu'en partant d'un ensemble, puis en en prenant l'ensemble des parties, puis en en prenant encore les parties, etc, on arrivera jamais à l'atteindre. Un cardinal inaccessible est à ses cardinaux plus petit ce que l'infini des nombres entiers est aux nombres finis. On a beau itérer l'ensemble des parties d'un ensemble fini, on restera toujours un ensemble fini. Les cardinaux inaccessibles sont si grands que leur existence même n'est pas démontrable au sein des mathématiques classiques [AB07]. Une manière de prouver cela est de montrer que si l'on suppose que de tel cardinaux existent, alors on peut prouver que les mathématiques (ZFC ici) sont sans contradiction, ce qui contredit un fameux théorème d'incomplétude de Gödel.

Finalement pour internaliser les mathématiques constructives dans des topos, on utilise ce que l'on appelle un univers de Grothendieck dont la construction repose sur un cardinal inaccessible dont la question de l'existence au sein des mathématiques *classiques* ne saurait être résolue. À ce niveau, arrivent des questions de fondations très techniques et faisant débats au sein de la recherche actuelle. L'auteure trouvait intéressant d'exposer très brièvement comment différents paradigmes des mathématiques s'interconnectent et à quels océans de concepts et de problèmes ouverts les mathématiques sont face.

3 La phénoménologie husserlienne comme fondation

La volonté de vouloir étendre le pouvoir structurel du langage catégorique au champ total de la connaissance ne saurait se faire sans un solide fondement philosophique. L'auteure se propose donc dans cette section de prouver que les méthodes catégoriques s'organisent et se pratiquent selon une phénoménologie similaire à celle de Husserl. Ce travail est au stade embryonnaire, la philosophie développée par Husserl est dense et ardue, et l'auteure n'en maîtrise que des rudiments. Elle ne prétend donc pas donner une interprétation catégorique exacte, ou même pertinente, de cette philosophie, mais d'avancer assez d'éléments pour convaincre la lectrice d'une telle possibilité. Les principales références pour cette sections sont les Méditations cartésiennes [Hus00] et les *Ideen* [Hus85] d'Husserl.

3.1 Une trame de fond

3.1.1 Point de départ commun

La possibilité d'une phénoménologie que nous dirons *calculatoire* est d'abord motivée par le côté structurel et universel des catégories, elles sont capables de voir le monde des mathématiques comme horizon et comme structure. Les travaux de Lawvere, nous l'avons évoqué, leurs donnent aussi des pouvoirs de fondations communes à l'édifice mathématique. Peut-on pousser les choses encore plus loin, et en faire une phénoménologie pratique qui serait une fondation commune à la connaissance en général ?

La phénoménologie s'attelle à la recherche d'un fondement transcendantal de la connaissance, pour cela, elle reprend l'idée de Descartes de trouver une justification initiale dans la subjectivité transcendantale, sans entrer dans un dualisme corps et âme. Elle est une épistémologie radicale, qui cherche une certitude sans présupposition, un fondement comme science des sciences. À l'inverse de la tradition anglo-saxonne, notamment chez Hume où la construction du soi arrive comme une conséquence empirique des lois de la nature, Husserl commence par le soi, par l'ego cogito, le sujet pensant. Il est le point de départ initial qu'il convient ensuite de déployer à l'extérieur. Pour le faire, il est nécessaire d'identifier les essences éternelles et structurelles de la pensée, ensuite, il nous faudra un projet méthodologique pour déployer ces essences.

3.1.2 Vers une phénoménologie calculatoire

Le point de départ de notre phénoménologie calculatoire dit que les essences de la pensée, et les a priori en général, ont une structure catégorique. C'est notre supposition de base. Pour Husserl, l'intuition se découpe en plusieurs régions, qui ont chacune des ontologies propres. Nous pensons qu'à chacune de ces régions correspond une méthode, ou une construction catégorique. Les travaux du chapitre suivant tendrait à démontrer que la région des causes a pour ontologie la notion d'extension de Kan. Bien que cette pensée ait besoin d'être étayée, l'auteure pense que la région de l'intuition correspondant à l'espace devrait avoir une essence reliée aux constructions simpliciales, et peut-être même est-il possible de la pousser jusqu'à la notion de construction (co)bar [Wei94], qui est capable d'entrevoir les invariants les plus profonds sur les espaces. Justifier que les essences ont telles structures n'a rien d'évident. Si d'une part, il est vrai que certaines constructions mathématiques, et donc leurs essences platoniciennes, ont des structures catégoriques, il n'en est pas vrai de toutes. D'autre part le monde des structures mathématiques et des structures réelles ont des différences fondamentales, en termes de contenus, de complexité, et d'eidos.

Pourtant, nous argumentons que faire de la théorie de catégories, c'est faire de la phénoménologie dans laquelle les phénomènes se calculent. Pour l'instant, cette phénoménologie n'est appliquée qu'aux phénomènes mathématiques et l'ambition de ce travail est de montrer qu'elle peut s'étendre au reste des choses.

3.2 L'épochè comme calcul, l'intentionnalité comme fléchage

Nous voulons ici présenter deux concepts phare de la phénoménologie de Husserl, et les relier avec les méthodes pratiques de la théorie des catégories. Ce faisant, nous défendons l'idée que ce que nous développons ici a bien les contours d'une phénoménologie.

3.2.1 L'épochè

Pour pratiquer l'épochè, il faut faire une pause, se placer dans l'autre état, celui du non-présent. Nous mettons en parenthèse la thèse du monde. Nous cessons de croire en la réalité extérieure du monde, c'est-à-dire que nous ne la gardons que comme phénomène. Donc, nous, sujets méditants, excluons du champ de nos jugements les valeurs d'existences du monde objectif. Dans la parenthèse de l'épochè, nous mettons en pause le présent et l'espace, nous cessons d'avoir une croyance pour l'existence du monde. Un moi transcendantal s'établit au dessus d'un moi dans le monde, et ce moi transcendantal est le sujet méditant. C'est au sein de cette épochè, de cette mise entre parenthèses, que va se dérouler l'analyse phénoménologique.

Cette démarche est celle du calcul, ou plutôt de la possibilité d'un calcul. Mettre entre parenthèses la thèse du monde, c'est notamment se donner la capacité de l'exploiter, de la transformer, et de la découvrir sous un autre jour. Ce qui reste après l'épochè, c'est la donnée pure, nous oublions la notion de cause et d'effet, les théorèmes scientifiques, et nous avons des données pures. D'après notre point de départ initial, ces données, ces essences, ont une structure catégorique. C'est cette structure qu'il nous conviendra d'étudier par notre méthode.

Nous pensons que la réduction phénoménologique correspond à la notion de *synthétique* ou de *catégorification* [BD98] des concepts. Il s'agit de regarder les données pures qui arrivent à notre intuition, et de les rendre catégoriques. Ce projet de synthétisation sera l'objet de la section 4.1, qui tentera de donner une interprétation standard de la théorie des catégories pour l'examen de la conscience. Par exemple, en admettant qu'une conscience puisse être synthétisée (ou devrions-nous dire *syntaxtisé*) par une catégorie, on a, par les règles mathématiques, l'existence du foncteur identité. Par l'interprétation standard, ce foncteur est le foncteur de la conscience qui a conscience d'elle-même. Le foncteur identité peut ainsi se voir comme un corrélat d'essence, permanent et structurel, de la synthétisation de la notion de conscience.

Un point similaire entre ces réductions phénoménologiques catégoriques et celle de Husserl, est cette particularité de cercle épistémologique, cette impression de tourner en rond, ou pire de simplement faire du sur place. Si cette autoréflexion pose des problèmes logiques pour les philosophes, elle est tout à l'avantage des catégoriciennes, et elle en fait le cœur même.

3.2.2 L'intentionnalité

Avec l'intentionnalité, nous souhaitons justifier le fléchage. La phrase phare de ce concept est

> Toute conscience est conscience de quelque chose.

La conscience est orienté, via une ouverture qui met en relation le sujet et l'objet. C'est précisément, dit Husserl, dans ce rapport avec la conscience que la conscience se construit, l'objet d'étude c'est cette flèche, c'est le morphisme. En théorie des catégories, l'analyse est similaire, c'est une théorie de l'intentionnalité. La notion d'objet est anodine, presque de trop. On pourrait (et on le fait parfois) définir une catégorie qu'avec la notion de flèche, sans même parler des objets qui en sont l'intérieur. Ceux-ci serait des corrélats des identités, donc du cogito qui a conscience de lui-même, et cette conscience n'existe que en tant que conscience d'elle-même, la conscience se construit dans son rapport avec elle-même par la notion d'identité. Dans l'établissement de ce lien, il y a plusieurs strates. Le monde est un gigantesque phénomène et la conscience y est plongée par une flèche dans une première couche, dans une seconde, on trouve le monde autour du monde auquel ma conscience pointe, autour de ce monde en voilà un autre.

Utilisons le "je", sujet pensant, pour donner un exemple. Je me concentre sur un objet de mon bureau, je le perçois comme objet intentionnel, il est au premier plan de ma conscience. Lui-même est plongé, via d'autres flèches, dans un second plan qui correspond à un monde plus général qui m'entoure. Tous ces plongements de l'objet dans les seconds plans me sont accessibles, et j'y accède via la composition des morphismes. Je suis une conscience $\mathcal{C}$, et je perçois un objet $\mathcal{O}$ avec un fléchage intentionnel $\mathcal{C} \to \mathcal{O}$. Cet objet est aussi mis au sein de la situation $\mathcal{S}$ (le monde autour de moi, dans lequel je me situe), par toute une variété de flèches, dont en voilà une $\mathcal{O} \to \mathcal{S}$. Alors ma perception composée

$$\mathcal{C} \to \mathcal{O} \to \mathcal{S}$$

correspond à un mode de perception du monde par ma conscience. La conscience se met en relation directe avec un espace des phénomènes plus large, mais la face par laquelle elle regarde le monde dans ce mode de perception là, est celle du phénomène de l'objet dans le phénomène du monde. Par exemple, faire la composition serait transférer l'intentionnalité d'une "feuille (sur un bureau)" à "(une feuille sur un bureau)". Réciproquement, supposons un fléchage $\mathcal{C} \to \mathcal{S}$ et par des calculs, nous lui exhibons une factorisation $\mathcal{C} \to \mathcal{O} \to \mathcal{S}$, alors nous venons de mettre en lumière un point de convergence intentionnel de la conscience dans son point de vue sur le monde. Cette factorisation correspond à une réduction phénoménologique pour le cogito qui avance d'un pas supplémentaire vers les essences mêmes des phénomènes qui l'entourent.

Un conséquence de cette description est la symétrie intrigante entre la conscience et les phénomènes auxquels elle accède, qui sont eux aussi décris de la même manière. L'existence de la conscience serait alors au même plan que l'existence de toute chose. Cette remarque appelle à des investigations ontologiques supplémentaires. Une conscience se distinguerait peut-être par sa complexité ou par la diversité des liens qu'elle entretient avec les autres phénomènes, mais cela serait tout.

Finalement, jusqu'à présent, nous avons omis le nom des flèches. Celui ci est important, $X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ et $Y : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ ne sont pas les mêmes choses. On verra d'ailleurs dans la partie suivante que ces deux modes de perceptions n'ont pas le même noème. La nomenclature de la flèche spécifie par quels moyens la conscience a conscience du monde, par quels *modes de perception*. Généralement, nous voulons pouvoir opérer sur ces modes de perceptions, et les additionner ou les partitionner, c'est là qu'interviendrons les opérations catégoriques, et à deux modes de perceptions X et Y il fera sens de considérer $X + Y$, qui est l'addition (au sens littéraire) des phénomènes perçus.

3.3 Hypothèse : le noème est une colimite

Essayons de pousser notre phénoménologie encore plus loin, et de décrire le concept de noème comme une colimite.

3.3.1 Justifications essentielles

La conscience est conscience de quelque chose, c'est l'intentionnalité. Or ce quelque chose ne peut être un objet en soi (sinon comment penser les objets imaginaires ou abstraits), et ne peut pas simplement être l'image mentale d'un quelque chose par le mode de perception, car cela ne permettrait pas de distinguer entre une perception réelle et une perception hallucinée, les deux ayant la même image mentale. Husserl répond à ce problème avec la notion de noème, qui est une généralisation de la notion de sens. Le noème d'un acte doit nécessairement prendre en considération le mode de perception, la qualité des actes. Selon Føllesdal [Aug12], le noème possède deux composantes essentielles :

1. une composante liée à l'acte de perception lui-même, c'est-à-dire à la manière de recevoir l'objet en tant qu'intentionnalité.
2. une composante liée à l'objet, c'est-à-dire que tous les noèmes lié à un objet réel auront cette composante en commun, indépendamment des modes de perception.

Prenons un objet $\mathcal{J}$, et envoyons dans une conscience $\mathcal{C}$ via le mode de perception $X : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Le noème associé à cette situation se trouve calculable par

$$\operatorname{colim} X$$

Il se décompose en deux entités :

1. Le sommet c du cocône.
2. Une famille de morphismes $(t_j)_{j\in\mathcal{J}}$.

Le sommet c est la manière de recevoir l'objet en tant qu'intentionnalité, c'est lui qui changera lors des différents actes de perceptions de l'objet. Les morphismes sont les directions communes que doivent prendre les noèmes liés à l'objet réel. Tous les noèmes pour $\mathcal{J}$ seront constitués d'une famille de directions indexée par l'objet réel, mais le lieu de cette direction sera propre au noème particulier, car il résulte du mode de perception. La prise de la colimite, et non d'un cocône quelconque se justifie par le fait que le noème est unique à chaque acte de perception X. De plus, les considérations de la science phénoménologique sont de nature transcendantale, ce qui suggère donc un appel aux constructions universelles.

3.3.2 Un théorème noématique

En conséquence, on dispose maintenant du foncteur noématique

$$\operatorname{colim} : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \to \mathcal{C}$$

dont on sait qu'il a un adjoint à droite

$$\Delta : \mathcal{C} \to [\mathcal{J}, \mathcal{C}]$$

En particulier, nous avons donc le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Le cogito est noémiquement clos.*

Démonstration. Soient $X, Y : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ deux actes de perceptions. Le noème associé au mode de présentation $X + Y$ est

$$\operatorname{colim}(X + Y) = \operatorname{colim}(X) + \operatorname{colim}(Y)$$

car la colimite est adjoint à gauche, donc préserve les coproduits. Or $\operatorname{colim}(X) + \operatorname{colim}(Y)$ n'est rien d'autre que la colimite du foncteur

$$Z : \mathbb{2} \to \mathcal{C}$$

où $Z(0) = \operatorname{colim} X$ et $Z(1) = \operatorname{colim} Y$. Donc

$$\operatorname{colim}(X+Y) = \operatorname{colim}(Z)$$

Autrement dit, le noème de $X+Y$ est le noème de Z. Or le foncteur Z représente un mode de perception qui est celui qui renvoie le cogito à sa réflexion sur les noèmes initiaux de X et Y, c'est le cogito qui a pour cogitatum ses propres noèmes. Cette acte de perception (à un niveau d'auto-réflexivité supérieur à celui de X, ou de Y), possède comme noème le même que celui du mode de présentation initial $X+Y$. On pourrait procéder de manière similaire sur une colimite des modes de perceptions aussi complexe que l'on veut . $\square$

Ce résultat permet donc en partie de comprendre la limitation du noème dans la transcendance du cogito, s'intéresser aux noèmes de ses noèmes revient à s'intéresser directement à ses noèmes, selon peut-être un mode nouveau. La description de ce mode relève de la science noétique, dont l'auteure aimerait explorer les détails dans un futur travail.

4 Déploiement à la structure

Utilisons tous les outils mis en place jusqu'à présent pour en tirer des applications plus visibles.

4.1 Interprétation standard

Cette partie va tenter de donner des directions d'interprétation des outils catégoriques pour une utilisation standard, ou canonique, dans le monde des structures non abstraites, et en particulier humaines. Nous partons des justifications phénoménologiques de la partie précédente, et essayons de les rendre plus concretes et utilisables.

4.1.1 Catégories, foncteurs, transformations naturelles

Les principales grandes définitions de la théorie des catégories énoncées, voyons comment ce langage peut permettre de parler des choses en général et comment elle constitue un langage universel pour décrire l'information contenue dans les choses. Sa puissance expressive permettra de transformer l'information tout en la suivant parfaitement à la trace.

Une catégorie est un concept, ce peut-être n'importe quelle structure. Par exemple on peut dire qu'une personne est une catégorie. Une personne est une structure constituée de choses en elle (souvenirs, peurs, désirs, sensations, etc.) et de liens entre ces choses (tel souvenir agit sur tel peur, tel sensation sur tel émotions). En soi, il n'est pas important de décrire l'internalisation de chaque catégorie que l'on utilise. Il suffit de dire "soit $\mathcal{C}$ la catégorie qui décrit telle personne". C'est ce qu'on en fait et dans quelles constructions de plus haut niveau on la place qui est intéressant. Nous allons le voir sur des exemples ensuite. Parfois, il est utile de zoomer localement à l'intérieur de la catégorie pour pouvoir faire des calculs, et la puissance de cette description est qu'il n'y a pas besoin de tout décrire parfaitement pour que cela marche, car la thèse que nous défendons est que ce langage permet de capturer l'essence des structures.

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ s'interprète aussi bien comme $\mathcal{D}$ observant $\mathcal{C}$ que comme $\mathcal{C}$ agissant sur $\mathcal{D}$. Un foncteur important pour la suite est le foncteur d'observation. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories de personnes, $\mathrm{Ob} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur qui décrit une manière que $\mathcal{D}$ a de voir $\mathcal{C}$. Par exemple, si $\mathcal{C}$ est inconnu de $\mathcal{D}$, on pourrait dire ce foncteur sera le foncteur constant envoyant tout l'intérieur de $\mathcal{C}$ sur le concept général d'être humain au sein de $\mathcal{D}$. Au contraire, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont la même personne, on pourrait affirmer que le foncteur F est plein et fidèle (une sorte de bijection améliorée), ouvrant la porte à de nouvelle propriétés structurelles pour nos calculs.

Une transformation naturelle $t : F \to G$ s'interprète de la même manière. Il s'agit pour G de reproduire fidèlement les actions du foncteur F. C'est une manière de déformer le lien $F(f) : F(c) \to F(c')$ en un lien compatible $G(f) : G(c) \to G(c')$. Comme les transformations naturelles sont moins intuitives à justifier, prenons un exemple des mathématiques. Soient deux entités mathématiques, les anneaux commutatifs **CRing** et les groupes **Grp**. **Grp** veut avoir une idée de ce que à quoi **CRing** ressemble, quel type d'entité c'est. Le problème est que **CRing** dispose d'une structure différente de **Grp**, et **Grp** n'a pas la complexité structurelle pour comprendre parfaitement ce qu'est un anneau commutatif. Par chance, les mathématiciennes ont développé plusieurs manières pour **Grp** d'observer **CRing**. Cela peut se faire via les foncteurs $\mathrm{GL}_n : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Grp}$ qui envoient chaque anneau commutatif $R \in \mathbf{CRing}$ sur $\mathrm{GL}_n(R) \in \mathbf{Grp}$, le groupe de ses matrices inversibles d'ordre n. Cela donne un foncteur pour chaque entier naturel non nul. Pour $n = 1$, appelons ce foncteur $\star$. Il envoie un anneau commutatif sur le groupe des inversibles de l'anneau. Par ailleurs, on dispose du déterminant, $\det_R : \mathrm{GL}_n(R) \to R^\star$. Les mathématiques indiquent que pour chaque morphisme d'anneau $f : R \to S$,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n(R) \arrow[r, "\mathrm{GL}_n(f)"] \arrow[d, "\det_R"'] & \mathrm{GL}_n(S) \arrow[d, "\det_S"] \\ R^\star \arrow[r, "f^\star"'] & S^\star \end{tikzcd}$$

commute. Cela dit précisément que $\det : \mathrm{GL}_n \to \star$ est une transformation naturelle. Il permet de déformer l'observation fine des matrices en n^2 éléments venant de GL_n en l'observation plus grossière, composée uniquement d'un élément, de $\star$.

4.1.2 Sur les foncteurs d'observations

Tentons d'utiliser cette interprétation à travers un petit exemple, qui nous servira de prémisse pour les extensions de Kan comportementales. Le problème est le suivant. Les gens interagissent, réagissent et effectuent des actions les uns envers les autres. Comment le faire en toute généralité ? Nous allons explorer ce problèmes à travers l'interprétation standard et voir comment des propriétés fonctorielle peuvent prévenir cela. Nous supposons deux catégories de personnes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Le détail intérieur de ces categories nous importe peu, nous savons simplement qu'il est là. Lors de l'épochè phénoménologique, nous considérons deux foncteur

$$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

et

$$G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$

Selon l'interprétation standard, F est l'agente $\mathcal{A}$ vue par $\mathcal{B}$ tandis que G est l'agente $\mathcal{B}$ vu par $\mathcal{A}$. Pour se familiariser avec ces concepts, supposons dans un premier temps que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont une connaissance parfaite l'une de l'autre. Comment traduire ce fait de manière catégorique ? Nous pourrions par exemple dire que F est l'identité. Cela n'est pas possible, dans la mesure où bien que structurellement identiques, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ restent des agentes différentes.

Soit alors $b \in \mathcal{B}$ une chose de la catégorie de l'agente $\mathcal{B}$. Une peur, un désir, un souvenir, une action, une pensée, une idée, quelque chose. Cette chose b est observée par $\mathcal{A}$ et se place dans sa conscience via $G(b)$. $\mathcal{B}$ a son tour, peut observer, via le foncteur F, cet objet $G(b)$, via $F(G(b))$. Nous affirmons que

$$b \simeq F(G(b))$$

En effet, sous l'hypothèse où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont une parfaite connaissance l'une de l'autre, l'objet de nature b au sein de $\mathcal{B}$, et l'observation de l'observation de $\mathcal{A}$ renvoient en fait à la même chose, qui n'est pas pour autant égale, car l'un est directement l'objet interne à la conscience, tandis que l'autre est le corrélat de cet objet à travers deux observations successives. Au sein de l'épochè, ces objets ont les mêmes propriétés mais sont de natures différentes, ils sont isomorphes.

Définition 4.1 (Surjectivité essentielle). *Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est dit* essentiellement surjectif *si pour tout $b \in \mathcal{B}$ il existe un $a \in \mathcal{A}$, tel que*

$$b \simeq F(a)$$

Nous venons de montrer que le foncteur d'observation F est essentiellement surjectif. En effet pour chaque $b \in \mathcal{B}$, le a de la définition précédente est donné précisément par $G(b)$. Par ailleurs, un raisonnement similaire, où l'on inverse le rôle de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, prouve que le foncteur G est aussi essentiellement surjectif. Cette propriété en soit ne permet pas encore de dire que deux structures sont les mêmes, ou peuvent avoir une connaissance parfaite l'une de l'autre. Nous n'avons pas encore parlé des liens. Sans eux, voyons comment nous aboutissons à une à une traduction pauvre de ce que nous essayons de décrire catégoriquement. Supposons que $\mathcal{A}$ soit une catégorie où chaque objet $a \in \mathcal{A}$ dispose de deux liens. Le premier est $id_a : a \to a$ (forcément il doit être là), et le second en est un autre $n_a : a \to a$, qui n'est pas nécessairement égal à l'identité. Appelons-le *la nuance sur l'objet a*. Dans le but de faire de $\mathcal{A}$ une catégorie, nous imposons aussi que $n_a \circ n_a = n_a$, on ne peut pas nuancer plus la nuance. La lectrice qui se demande pourquoi nous imposons une telle condition remarquera que sans cela, nous n'avons pas spécifié entièrement la catégorie $\mathcal{A}$. En effet, nous avons tout à fait le droit de composer n_a avec lui-même et nous obtenons

$$n_a \circ n_a : a \to a$$

et nous devons donc savoir qui est ce nouveau lien que nous venons de créer. Par ailleurs, définissons l'agente $\mathcal{B}$ comme étant l'agente $\mathcal{A}$, mais sans le lien de nuance entre les choses. C'est-à-dire que $\mathcal{B}$ dispose des mêmes objets que $\mathcal{A}$, mais les seuls liens présents chez elle sont les identités. $\mathcal{B}$ dispose d'un foncteur d'observation qui, dans le meilleur des cas (celui où l'observation est la plus fine), est

$$\begin{aligned} F : \mathcal{A} &\to \mathcal{B} \\ a &\mapsto a \\ n_a &\mapsto \mathrm{id}_a \end{aligned}$$

Ce foncteur envoie chaque objet sur son homonyme, et chaque nuance sur l'identité (et bien évidemment, les identités sont envoyées sur les identités). Par ailleurs, $\mathcal{A}$ dispose aussi d'un foncteur d'observation où chaque objet de $\mathcal{B}$ est envoyé sur son homonyme. On vérifie aisément que ces foncteurs sont essentiellement surjectif, car $G(F(a)) = a$ et $F(G(b)) = b$, pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$. De cette essentielle surjectivité ressort que les agentes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ disposent des mêmes choses. Pourtant elles ne sont pas capables de les analyser et de les relier entre elles de la même manière, $\mathcal{A}$ est capable d'une finesse d'analyse supérieure grace à ses nuances n_a. Ainsi, nous comprenons pourquoi l'essentielle surjectivité est trop faible pour représenter l'isomorphisme structurel. Il faut prendre en compte les liens.

Fixons alors deux choses $a, a' \in \mathcal{A}$. On rappelle que $\mathcal{A}(a, a')$ est l'ensemble des liens de a vers a'. L'agente $\mathcal{B}$ observe ces liens, comme toujours, grace au foncteur d'observation F, et les place dans $\mathcal{B}(F(a), F(a'))$. Nous voulons que toutes les nuances permettant d'aller de a vers a' soient conservées par F. D'une part, cela veut dire que F ne doit pas fusionner les liens entre eux. Si $f, g : a \to a'$ sont deux liens différents, alors $F(f) : F(a) \to F(a')$ et $F(g) : F(a) \to F(a')$ doivent être deux liens différents chez $\mathcal{B}$. Par ailleurs, $\mathcal{B}(F(a), F(a'))$ ne doit pas être plus nuancé que $\mathcal{A}(a, a')$, et donc pour chaque $h : F(a), F(a')$ doit correspondre un lien pré-image $f : a \to a'$ tel que $F(f) = h$. Concrètement, ce que nous venons de décrire se résume dans la définition suivante.

Définition 4.2 (Foncteur plein et fidèle). *Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur. Pour chaque $a, a' \in \mathcal{A}$, appelons $\psi_{a,a'}$ la fonction*

$$\begin{aligned} \psi_{a,a'} : \mathcal{A}(a, a') &\to \mathcal{B}(F(a), F(a') \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

On dit que

— *F est* fidèle *si pour tout $a, a' \in \mathcal{A}$, $\psi_{a,a'}$ est injective*

— *F est* plein *si pour tout $a, a' \in \mathcal{A}$, $\psi_{a,a'}$ est surjective*

Lorsque les deux conditions sont réunies, donc quand pour tout a, a', $\psi_{a,a'}$ est bijective, on dit que F est pleinement fidèle.

Pour résumer, nous disons que deux agentes ont une connaissance parfaite l'une de l'autre lorsqu'elles disposent chacune d'un foncteur d'observation essentiellement surjectif et pleinement fidèle.

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est essentiellement surjectif et pleinement fidèle, alors (sous l'axiome du choix, donc de manière discutable), il est possible de montrer qu'il existe un foncteur $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, essentiellement surjectif et pleinement fidèle lui aussi, tel qu'il existe deux isomorphismes naturels

— $t : G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$

— $s : F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$

Ainsi, ce que nous venons de montrer est que dès lors qu'un des deux foncteurs d'observations est essentiellement surjectif et pleinement fidèle, on pourra trouver un foncteur d'observation réciproque (modulo l'axiome du choix) qui permet donc d'affirmer que les deux agentes ont une connaissance parfaite l'une de l'autre. Par ailleurs, $\mathcal{A}$ s'observant à travers l'observation que $\mathcal{B}$ a d'elle n'est rien d'autre (à traduction près, grace à l'iso-manuel $t : G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$) que $\mathcal{A}$ elle-même.

4.2 Un avant-goût : l'intersectionnalité

4.2.1 Description par le produit

Soient $D_1, \ldots, D_n$ diverses formes de discriminations (race, genre, orientation, etc.). Alors qu'un mécanisme d'oppression O s'étudiait à travers les liens $\delta_i : O \to D_i$ individuellement pour chaque forme de discriminations, l'intersectionnalité démontre l'existence du produit

$$\prod_{i=1}^{n} D_i = D_1 \times \cdots \times D_n$$

et s'intéresse au mécanisme d'oppression $O \to D_1 \times \cdots \times D_n$ qui en résulte. Les oppressions sur des formes de discriminations précises n'étant qu'une projection de la discrimination première. Plus précisément, pour chaque forme de discrimination D_j, on dispose d'une projection $\pi_j : \prod_{i=1}^{n} D_i \to D_j$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] \arrow[dr, "\delta_j"'] & \prod_{i=1}^{n} D_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ & D_j \end{tikzcd}$$

Cela veut dire que l'oppression subie $\delta_j : O \to D_j$ à cause de la discrimination de type D_j est en fait une simple composante de l'oppression totale $O \to \prod_{i=1}^{n} D_i$.

4.2.2 Ce que nous ne faisons pas

Cette notion de produit permet une description très sommaire de la théorie sociologique de l'intersectionnalité. Elle ne donne pas la théorie, elle fournit un langage unifié dans lequel on peut en retrouver l'essence.

Bien sûr, cette théorie est bien plus complexe que cela, mais justement, en l'étudiant et essayant d'en exhiber la structure de manière plus fine, plus détaillée, nous pensons qu'il est possible de décrire la structure des informations qu'elle renferme. En effet, on peut voir cela comme une base de données et parler de sa structure, sans forcément parler du contenu. Et bien sûr, la difficulté en science est aussi celle du contenu, mais la question sur laquelle nous voulons nous pencher et celle de la structure commune des contenus. En mathématiques, de beaucoup de contenus (théories mathématiques) a émergé une structure commune et unificatrice décrite par le langage catégorique, ce qui a permis de faire des ponts et des avancées inattendues. Par ailleurs, la notion de produit reste assez sommaire, et donc ne permet pas de rendre compte de la finesse des concepts manipulés.

4.3 Adjonction consentie

Dans cette partie, nous défendons l'idée selon laquelle les mécanisme du consentement fonctionnent selon une adjonction entre deux catégories de préordre.

4.3.1 Théorie

Définition 4.3 (Catégorie de préordre)**.** *On dit que $\mathcal{C}$ est une* catégorie de préordre *si pour tous objets $c, d \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(c, d)$ est soit vide, soit n'a qu'un seul élément. Dans le cas où $\mathcal{C}(c, d)$ n'est pas vide, on écrit $c \leq d$ son unique élément.*

Comme il y a toujours l'identité dans $\mathcal{C}(c, c)$, et que $\mathcal{C}(c, c)$ a au plus une flèche, on a que $\mathrm{id}_c \in \mathcal{C}(c, c)$ est $c \leq c$. On voit aussi que la composition donne que lorsque $c \leq d$ et $d \leq e$, on a $c \leq e$. Ainsi, une catégorie de préordre donne naissance au préordre $\leq$ sur les objets de $\mathcal{C}$.

Lemme 4.1. *Un foncteur entre deux catégorie de préordre est une fonction croissante sur l'ordre associé.*

Démonstration. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégorie de préordre. Si l'on a $c \leq c'$, par définition $F(c \leq c') \in \mathcal{D}(F(c), F(c'))$, donc on a $F(c) \leq F(c')$. □

Lemme 4.2. *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories de préordre, $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Alors $L \dashv R$ si et seulement si pour tout $c \in \mathcal{C}$ et $d \in \mathcal{D}$, l'on a*

$$L(c) \leq d \iff c \leq R(d)$$

Démonstration. Pour $c \in \mathcal{C}$ et $d \in \mathcal{D}$,

$$L(c) \leq d \iff c \leq R(d)$$

est équivalent à

$$\mathcal{D}(L(c), d) \simeq \mathcal{C}(c, R(d))$$

Cet isomorphisme est toujours naturel par unicité des morphismes. □

4.3.2 Mise en situation

Nous supposons deux sous-catégories de personnes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Ces catégories sont nos agentes. Nous nous plaçons dans un certain contexte et faisons l'époché, nous prenons donc les choses du monde réel comme des phénomènes et nous mettons en pause la thèse du monde. Les objets de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont les actions possibles dans le contexte donné. Soient $a, a' \in \mathcal{A}$ deux actions données. On place un et un unique morphisme entre a et a' que l'on note $a \leq a'$ dès si l'action a' est effectuée (dans le référentiel de $\mathcal{A}$), alors l'action a peut aussi être effectuée. Par exemple, on pourrait avoir chez $\mathcal{A}$

$$\text{toucher le bras} \leq \text{embrasser sur la joue}$$

Cela voudrait dire que pour une telle agente $\mathcal{A}$, dès lors que l'on peut l'embrasser sur la joue, on peut aussi lui toucher le bras. Lorsque $a \leq a'$, on dit que a' est plus *exigeante* que a (ou que a est *moins exigeante* que a'). La catégorie ainsi construite dépend du contexte et de la personne $\mathcal{B}$. De même, nous produisons la même construction pour $\mathcal{B}$. Nous créons aussi les deux foncteurs. Le premier est

$$\mathrm{Ac} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

C'est un foncteur d'action, de l'agente $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$. Il représente l'action de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$. Cela veut dire que pour chaque action a que $\mathcal{A}$ envisage, cette action est placée à un certain niveau de préférence par $\mathrm{Ac}(a)$ au sein de $\mathcal{B}$. En retour, nous avons le foncteur

$$\mathrm{Ob} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$

C'est le foncteur d'observation. Pour chaque action b dans le référentiel de $\mathcal{B}$, l'agente $\mathcal{A}$ observe où placer cette action dans ses niveaux de préférence par $\mathrm{Ob}(b)$. Nous nous plaçons dans la situation où $\mathcal{A}$ aimerai agir, et elle se soucie d'agir de manière consentie.

Fait 4.1. *Pour toute action a du référentiel de $\mathcal{A}$, et toute action b du référentiel de $\mathcal{B}$, si $\mathrm{Ac}(a) \leq b$, alors pour garantir le respect du consentement il faut $a \leq \mathrm{Ob}(b)$*

Démonstration. Soit a une action envisagée de $\mathcal{A}$. On suppose que $\mathcal{B}$ pense qu'une action b est plus exigeante que l'action $\mathrm{Ac}(a)$ reçue par $\mathcal{A}$. Pour que $\mathcal{A}$ respecte le modèle du consentement de $\mathcal{B}$, il faut que $\mathcal{B}$ ait la garantie que l'action que $\mathcal{A}$ observe par $\mathrm{Ob}(b)$ soit aussi plus exigeante que l'action envisagée a. □

Réciproquement,

Fait 4.2. *Pour toute action a du référentiel de $\mathcal{A}$, et toute action b du référentiel de $\mathcal{B}$, si $a \leq \mathrm{Ob}(b)$, alors pour garantir le respect du consentement il faut $\mathrm{Ac}(a) \leq b$.*

Démonstration. On suppose donc que $\mathcal{A}$ envisage d'effectuer l'action a. Elle observe l'action b du référentiel de $\mathcal{B}$ via $\mathrm{Ob}(b)$ et constate que de son point de vue que a est moins exigeante que l'action observée $\mathrm{Ob}(b)$. Il faut donc s'assurer que du point de vue de $\mathcal{B}$, l'action a qu'elle va recevoir à travers le foncteur d'action $\mathrm{Ac}(a)$ soit moins exigeante que b, sinon $\mathcal{B}$ pourrait recevoir une action à laquelle elle ne consent pas. □

Finalement, nous avons prouvé que pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$, on a

$$a \leq \mathrm{Ob}(b) \iff \mathrm{Ac}(a) \leq b$$

Ainsi, d'après les considération précédente, nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.1 (Théorème du consentement)**.** *Pour que le consentement soit respecté, il faut*

$$\mathrm{Ac} \dashv \mathrm{Ob}$$

L'action doit être adjoint à gauche de l'observation. Le fait que le foncteur d'observation soit un adjoint à droite se retrouve aussi dans la partie suivante sur les extensions de Kan comportementales, où l'on verra que l'observation est adjointe à droite de la réaction.

4.4 Extension de Kan comportementale

4.4.1 Organisation générale des interactions

Comment se comporter et être la meilleure être humaine ? Pour répondre à cette question, nous devons d'abord répondre à l'interrogation suivante :

Étant donné n'importe quelle situation, quelle est la meilleure chose à faire ?

Pour modéliser cela, la notion d'extension de Kan fait une apparition naturelle. Étant donné le diagramme suivant (où les flèches sont des foncteurs et les objets des catégories)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "K"'] & \mathcal{E} \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

l'extension de Kan à gauche représente $\mathrm{Lan}_K(F) : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, représente la *meilleure* approximation qui pourrait faire commuter le diagramme.

Disons qu'il y a une situation, c'est-à-dire une catégorie $\mathcal{S}$. L'agente $\mathcal{A}$, aussi une catégorie, agit sur la situation à travers le foncteur $\mathrm{Ac} : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$. L'agente $\mathcal{B}$, observateur de la scène dispose d'un foncteur d'observation $\mathrm{Ob} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Nous pouvons tout à fait supposer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des sous-catégories de celle décrite dans l'interprétation standard, et que nous gardons des agentes que les parties utiles au problème lié à la situation. Dans tous ces arrangement que nous considérons, la description intime des catégories mises en jeux importe peu, ce qui est important est ce qu'elles représentent.

Maintenant qu'il y a une action $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ va de voir réagir. Disons qu'elle le fasse avec un foncteur $G : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$. Cela permet de créer un nouveau foncteur $G \circ \mathrm{Ob} : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$, qui représente une action de $\mathcal{A}$, et qui peut être interprétée comme une *action résultante*. En effet, comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ interagissent, lorsque $\mathcal{B}$ réagis dans une situation à une action de $\mathcal{A}$, on peut moralement dire que $\mathcal{A}$ à agis sur la situation à travers la réaction de $\mathcal{B}$. Nous avons donc le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\mathrm{Ac}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ob}"'] & \mathcal{S} \\ & \mathcal{B} \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

Assertion 4.1. *L'action résultante* $G \circ \mathrm{Ob}$ *doit être la meilleure par rapport à l'action de* $\mathcal{A}$*.*

Dans le cas idéal, nous aimerions avoir $G \circ \mathrm{Ob} \simeq \mathrm{Ac}$. Malheureusement, ce n'est généralement pas possible pour plusieurs raisons, et principalement car le foncteur d'observation n'a pas de raison d'être plein et fidèle.

Supposons maintenant que Ob est fixé dans une situation $\mathcal{S}$ donné, il n'y a pas grand chose que $\mathcal{B}$ peut faire pour changer son observation de $\mathcal{A}$ au moment de l'épochè, où le calcul prend place. En pratique, ce foncteur devient de plus en plus précis au fur et à mesure que les agentes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ apprennent à se connaître, mais pour notre cas précis, on suppose que Ob est fixé. Ce que $\mathcal{B}$ doit maintenant faire, c'est trouver la réaction $G : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ appropriée. Le théorème suivant donne ainsi le moyen de calculer G.

Théorème 4.2. *Étant donné le l'assemblage suivant,*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\mathrm{Ac}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ob}"'] & \mathcal{S} \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

la réaction Reac : $\mathcal{B} \to \mathcal{S}$ *qui crée la meilleure action résultant par rapport à l'action* Ac *de* $\mathcal{A}$ *est* $\mathrm{Lan}_{\mathrm{Ob}}(\mathrm{Ac})$*, l'extension de Kan à gauche de* Ac *le long du foncteur d'observation.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{B}$ fasse n'importe quelle action $G : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$. Pour avoir la meilleure action résultante, nous avons vu qu'il faudrait $\mathrm{Ac} \simeq G \circ \mathrm{Ob}$. Or ce n'est pas possible, comme nous l'avons expliqué précédemment. Ainsi, le mieux que l'on puisse espérer est $\gamma : \mathrm{Ac} \to G \circ \mathrm{Ob}$, une transformation naturelle qui (d'après l'interprétation standard) explique comment $G \circ \mathrm{Ob}$ peut faire comme Ac. Nous savons en effet qu'une transformation naturelle est une sorte de manuel entre deux foncteurs d'action. Nous souhaitons donc construire le meilleur couple (G, γ), la meilleure réaction et la meilleure transformation naturelle, et c'est précisément ce que fait l'extension de Kan à gauche (celle de droite donne un manuel opposé, de $G \circ \mathrm{Ob}$ à Ac). □

Voyons plus en détail cette extension de Kan. Par définition, l'extension de Kan à gauche est le triangle d'action-réaction suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\mathrm{Ac}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ob}"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{S} \\ & \mathcal{B} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_{\mathrm{Ob}}(\mathrm{Ac})"'] & \end{tikzcd}$$

tel que pour n'importe quel autre triangle d'action-réaction que nous aurions pu faire avec $G : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ et un manuel associé $\gamma : \mathrm{Ac} \to G \circ \mathrm{Ob}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\mathrm{Ac}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ob}"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \mathcal{S} \\ & \mathcal{B} \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

il y a une unique transformation naturelle $\hat{\gamma} : \mathrm{Lan}_{\mathrm{Ob}}(\mathrm{Ac}) \to G$ telle que $\gamma = (\hat{\gamma}\,\mathrm{Ob})\eta$. La transformation $\hat{\gamma}$ doit se voir comme la réaction G essayant d'être comme $\mathrm{Lan}_{\mathrm{Ob}}(\mathrm{Ac})$. En d'autres terme, en appelant $\eta : \mathrm{Ac} \to \mathrm{Lan}_{\mathrm{Ob}}(\mathrm{Ac}) \circ \mathrm{Ob}$, le manuel indiquant à l'action résultante $\mathrm{Lan}_{\mathrm{Ob}}(\mathrm{Ac})$ comment être comme $\mathcal{A}$, on voit que pour n'importe quelle autre réaction G munie d'un manuel $\gamma : \mathrm{Ac} \to G \circ \mathrm{Ob}$, il existe un (unique) manuel d'action résultante $\hat{\gamma}\,\mathrm{Ob} : \mathrm{Lan}_{\mathrm{Ob}}(\mathrm{Ac}) \circ \mathrm{Ob} \to G \circ \mathrm{Ob}$ qui indique comment en fait l'action G essayait déjà d'être comme l'action $\mathrm{Lan}_{\mathrm{Ob}}$. En somme, l'extension de Kan à gauche, munie de son manuel η, est la meilleure correspondance à l'action Ac de $\mathcal{A}$, car tout autre chose essaye de lui ressembler.

4.4.2 Une description avec les adjonctions

Ainsi, dès que $\mathcal{A}$ agit par Ac, $\mathcal{B}$ doit réagir avec $\mathrm{Lan}_{\mathrm{Ob}}(\mathrm{Ac})$. Appelons $\mathrm{Reac}(\mathrm{Ac}) := \mathrm{Lan}_{\mathrm{Ob}}(\mathrm{Ac})$. Cela crée un foncteur de réaction Reac, qui prend n'importe quelle foncteur d'action Ac produit par l'agente $\mathcal{A}$ et renvoie la réaction la plus appropriée que doit faire $\mathcal{B}$. La lectrice intéressée pourra vérifier que Reac est bien un foncteur

$$\mathrm{Reac} : \mathcal{S}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{S}^{\mathcal{B}}$$

où $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ est la catégorie de toute les actions que $\mathcal{A}$ peut faire dans une situation donnée. Étant donné n'importe quelle (ré)action $G \in \mathcal{S}^{\mathcal{B}}$, nous avons aussi vu qu'il existe l'action résultante $G \circ \mathrm{Ob}$. Appelons donc $\mathrm{Ob}^*(G) := G \circ \mathrm{Ob}$. Nous savons que Ob^* est un foncteur

$$\mathrm{Ob}^* : \mathcal{S}^{\mathcal{B}} \to \mathcal{S}^{\mathcal{A}}$$

De plus, d'après la partie sur les extensions de Kan, nous savons que Reac est adjoint à droite de Ob^*. Donc nous avons

Théorème 4.3 (Loi des relations)**.** *Pour qu'une relation entre deux agentes fonctionne, il faut avoir*

$$\mathrm{Reac} \dashv \mathrm{Ob}^*$$

Le slogan de ce théorème pourrait être

Dans vos relations, l'observation est l'adjoint à droite de vos réactions.

En outre, cette adjonction vient (comme toutes les adjonctions) avec une unité (qui est une transformation naturelle)

$$\eta : 1_{\mathcal{S}^{\mathcal{A}}} \to \mathrm{Ob}^* \circ \mathrm{Reac}$$

et nous avons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}^{\mathcal{A}} \arrow[r, bend left=50, "1_{\mathcal{S}^{\mathcal{A}}}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Ob}^* \circ \mathrm{Reac}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathcal{S}^{\mathcal{A}}
\end{tikzcd}$$

Si nous suivons le chemin du haut, nous prenons sur la gauche une action $F : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ et obtenons sur la droite la même chose. Si nous suivons le chemin du bas, et que nous prenons la même action F sur la gauche, nous obtenons l'action résultante $\mathrm{Lan}_{\mathrm{Ob}}(F) \circ \mathrm{Ob}$, qui est la meilleure possible, et le manuel est donnée par l'unité η en cette action F.

$$\eta_F : F \to \operatorname*{Lan}_{\mathrm{Ob}}(F) \circ \mathrm{Ob}$$

Cela constitue une reformulation compacte. Le foncteur de réaction doit être adjoint à gauche du foncteur d'observation. De plus, avec la formule de la colimite que nous avons vue dans la section sur les extensions de Kan, nous savons qu'il est possible de calculer la réaction, simplement en se basant sur l'observation, et cela suggère le principe tout naturel qu'on ne réagit mieux qu'en observant mieux.

4.5 Le traducteur enrichi

Dans cette partie, nous allons voir dans quelle mesure nous pouvons utiliser les catégories enrichies pour définir une notion intéressante de traduction entre deux langues.

4.5.1 Théorie

Nous décrivons ici très brièvement le concept de catégorie enrichie. Afin de simplifier le discours, nous n'allons parler de catégories enrichie uniquement sur des catégories monoïdale stricte, mais nous attirons l'attention de la lectrice sur le fait que tous le travail suivant peut être effectué sur une catégorie monoïdale quelconque.

Définition 4.4 (Catégorie monoïdale stricte)**.** *Une* catégorie monoïdale stricte V *est une catégorie munie d'un bifoncteur* $\otimes : V \times V \to V$ *appelé le produit tensoriel, d'un objet* $1 \in V$ *qui sera l'unité de ce produit tensoriel, tel que pour tout* $a, b, c \in V$*,*

— $a \otimes 1 = a = 1 \otimes a$

— $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

Si la catégorie était simplement monoïdale, les symboles $=$ de la définition ci-dessus auraient été remplacés par des isomorphismes et il aurait fallu ajouter des diagrammes de commutation pour s'assurer de la cohérence de l'ensemble. De plus, on dit que la catégorie monoïdale stricte V est *symétrique* si pour tout a, b, on a $a \otimes b = b \otimes a$.

Définition 4.5. *Une* catégorie enrichie en une catégorie monoïdale (stricte) V *est une catégorie* $\mathcal{C}$ *telle que pour tout* $a, b, c \in \mathcal{C}$*, on ait*

— *un objet* $\mathcal{C}(a, b)$ *dans* V

— *un morphisme de composition* $\circ_{abc} : \mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, c)$ *au sein de* V

— *un morphisme* $j_a : 1 \to \mathcal{C}(a, a)$

De plus, il y a des diagrammes correspondant à l'associativité de la composition et au bon comportement des identités.

Donc, une catégorie enrichie est une catégorie où la classe des morphismes, au lieu d'être dépourvu de structure, sont des éléments de V. La flèche j_a désigne l'identité de chaque objet $a \in \mathcal{C}$ dans V. Par exemple, le diagramme d'associativité est le suivant, pour tout $a, b, c, d \in \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\circ_{bcd} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dd, equal] & \mathcal{C}(b,d) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "\circ_{abd}"] \\
 & \mathcal{C}(a,d) \\
\mathcal{C}(c,d) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \circ_{abc}"] & \mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(a,c) \arrow[u, "\circ_{acd}"']
\end{tikzcd}$$

Définition 4.6 (Foncteur enrichi)**.** *Si* $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ *sont deux catégories enrichies en* V*, un* foncteur enrichi $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *est un foncteur entre les deux catégories respectant l'enrichissement en* V*. C'est-à-dire que pour chaque* $a, b \in \mathcal{C}$*, on dispose d'un morphisme dans* V

$$F_{a,b} : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{D}(F(a), F(b))$$

vérifiant des propriétés de commutations s'assurant de la compatibilité de $\circ$ *et* j *avec* F*.*

Dans ces propriétés de commutations, on a par exemple le diagramme suivant, pour tout $a \in \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "j_a"'] \arrow[dr, "j_{F(a)}"] & \\
\mathcal{C}(a,a) \arrow[rr, "F_{a,a}"'] & & \mathcal{D}(F(a),F(a))
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme indique que le foncteur respecte l'identité j, de la même manière qu'un foncteur classique respecte les identités. En effet, si $\mathrm{id}_a : a \to a$ dans $\mathcal{C}$, on peut observer la similarité entre $F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ qui est l'axiome classique du foncteur et $F_{a,a} \circ j_a = j_{F(a)}$ qui est la commutation du diagramme ci-dessus.

4.5.2 Langage et catégorie enrichie

Nous supposons maintenant deux locutrices dans deux langues différentes, la première est $\mathcal{F}$ qui parle français ($\mathcal{F}$rançais) tandis que la seconde est $\mathcal{E}$ qui parle anglais ($\mathcal{E}$nglish). Nous souhaitons créer un foncteur de traduction pour que $\mathcal{E}$ puisse comprendre $\mathcal{F}$, donc un foncteur $T : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$. Procédons à l'épochè. Nous enrichissons $\mathcal{F}$ en $\mathcal{E}$. Ainsi pour chaque element de la langue $a \in \mathcal{F}$ dans un contexte $b \in \mathcal{F}$, on dispose d'un élément de la langue anglaise, $\mathcal{F}(a,b)$ qui décrit les manières de placer a dans ce contexte b en anglais, cette manière est une sorte d'oracle à laquelle les locutrices n'ont pas accès. La composition monoïdale sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}(b,c) \otimes \mathcal{F}(a,b) \to \mathcal{F}(a,c)$, indique simplement comment de a dans le contexte b et de b dans le contexte c on peut passer à a dans le contexte c (et est donc en quelque sorte tautologique). L'identité $j_a : 1 \to \mathcal{F}(a,a)$, pour $a \in F$, est la traduction canonique de a en anglais, c'est-à-dire la traduction que l'on trouverais dans un dictionnaire, sans contexte. D'autres morphismes $1 \to F(a,a)$ représentent d'autres nuances de traductions, mais il y aura toujours la traduction canonique $j_a : 1 \to F(a,a)$.

Supposons alors que le foncteur de traduction

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$$

est $\mathcal{E}$-enrichi, il faut en effet que la traduction soit compatible avec la structure de la langue. Choisissons un mot, ou concept, ou simplement chose du français qui est un objet $a \in \mathcal{F}$. Nous disposons du hom foncteur enrichi :

$$\mathcal{E}(c,\text{-}) : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$$

Celui-ci représente une explication complète du concept c dans la langue anglaise. Il est capable de prendre n'importe quel autre concept c' et de donner l'explication parfaite de c en contexte c', c'est un foncteur transcendantal en cela que le monde naturel n'y a pas accès et qu'il existe uniquement durant l'épochè.

Fait 4.3. *Pour un concept $e \in \mathcal{E}$, l'ensemble $\mathcal{E}(1,e)$ représente les nuances du concepts*

Démonstration. Selon l'interprétation précédente, un morphisme $1 \to e$ représente une manière de mettre rien dans le contexte e, donc représente une manière qu'a le concept e d'exister indépendamment de toute chose, ainsi chaque morphisme représente une de ces nuances. □

4.5.3 Application : le lemme de Yoneda enrichi

Il est possible de retrouver la philosophie de Yoneda pour les catégories enrichies et nous allons appliquer cela à l'exemple de la traduction. Nous supposons que les catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ aient une structure assez riche pour permettre l'application du résultat suivant, donc nous supposons notamment que $\mathcal{E}$ est symétrique, monoïdale fermée (et localement petite).

Sous ces hypothèse, le foncteur $e \otimes$ - dispose d'un adjoint à droite permettant d'enrichir $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}$ (et donc suggère qu'une langue est capable d'appliquer un principe d'autoréflexion). La lectrice souhaitant plus de détails est renvoyée vers [Kel05].

Lemme 4.3 (Yoneda enrichi)**.** *Soit $a \in \mathcal{F}$ et $T : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, un foncteur $\mathcal{F}$ enrichi. l'ensemble des $\mathcal{E}$-transformations naturelles de $\mathcal{E}(a, \text{-})$ vers T est en bijection avec $\mathcal{E}(1, T(a))$. Pour $\alpha : \mathcal{E}(a, \text{-}) \to T$, cette bijection se calcule par la composition*

$$1 \xrightarrow{j_a} \mathcal{F}(a, a) \xrightarrow{\alpha_a} T(a)$$

Essayons d'interpréter ce lemme dans le cas de la traduction T. T prend un concept français et le calcule en anglais via $T(a)$. Cette traduction est riche de nuance, qui son représentée par les morphismes $1 \to T(a)$, à chaque morphisme correspond une nuance. Le lemme de Yoneda enrichi nous indique alors que chaque nuance de traduction du concept a correspond plus généralement à une manière qu'à le foncteur de traduction T de se retrouver dans le foncteur de sens $\mathcal{E}(a, \text{-})$. Il faut bien comprendre ici les deux mondes qui se mêlent. D'un côté $\mathcal{E}(1, T(a))$ qui est purement le fruit de la langue anglaise, et qui n'a rien à voir avec le français. C'est simplement un concept $T(a)$ (qui certes émane d'une traduction, mais l'interprétation serait similaire si l'on considérait $\mathcal{E}(1, e)$, pour une certain e quelconque), et ce concept dispose d'un certain nombre de nuances. Chacune de ces nuances du concept traduit $T(a)$, correspond à une transformation naturelle $\mathcal{F}(a, \text{-})$ vers T. Selon l'interprétation standard, cela correspond donc à une manière dont la traduction essaye d'être comme le foncteur de représentation complète du concept a dans la langue $\mathcal{E}$. Par ailleurs, le lemme indique explicitement que chaque nuance de traduction est une déclinaison contextuelle de la traduction canonique j_a. Par un dessin, cela veut dire quà toutes les nuances au sein de $\mathcal{E}$

$$1 \rightrightarrows\!\!\!\rightrightarrows T(a)$$

correspondent tous les manuels

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathcal{F} \arrow[r, bend left=60, "\mathcal{F}(a,\text{-})"] \arrow[r, bend right=60, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\ \Downarrow\ \Downarrow\ \Downarrow"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

La limitation de cette construction étant bien entendu la fonctorialité de T, et cela est aggravé par le fait que T doive respecter l'enrichissement en $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$, qui est une condition qui n'est plausible que durant l'épochè. En pratique, nous pensons qu'une traduction imparfaite se traduit par un défaut de la bijection de Yoneda, ce qui peut être calculé, ou au moins appréhendé. En effet, nous proposons la conjecture suivante.

Conjecture 4.1. *Soit $T : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ une traduction que l'on modélise par le contexte ci-dessus. La qualité de la traduction du concept $a \in \mathcal{F}$ de la langue de départ peut être mesurée par la proximité qu'a la fonction qui à $\alpha : \mathcal{F}(a, \text{-}) \to T$ associe $\alpha_a \circ j_a$, à être une bijection.*

Cette conjecture permet d'affiner la traduction de chaque concept séparément, et se mesure dans la langue d'arrivée.

5 Conclusion et projets de développements futurs

5.1 Récapitulatif

L'ambition de l'auteure est de développer un langage systémique pour la structure et parler des choses. C'est un projet ambitieux. Donner une syntaxe à quelque chose d'aussi général que *quelque chose* revient à trouver le langage de l'univers, une sorte de quête d'unification ultime. Tel but ne peut conduire qu'à la déception. *Voilà un travail prétentieux* ; *c'est du n'importe quoi recouvert de formules mathématiques* ; *des conclusions aléatoires apportent plus de vérité que ce qui est exposé là* ; etc. Voilà bien des critiques que l'auteure accepte complètement. Les seules choses vraies dans ce rapport, avec une validité scientifique, sont les définitions mathématiques. Elles ont été établies, testées, et les résultats prouvés. Une traduction comme foncteur enrichi, une interprétation standard de la théorie des catégories, ou des extensions de Kan comportementale, toutes ces notions ont simplement une valeur syntaxique, qui reste à mesurer. Tout cela n'est que de la syntaxe. Nous venons de présenter une syntaxe pour la structure, nous venons de parler des choses, et avons essayé de le faire avec le plus grand niveau de généralité possible.

Notez aussi que nous avons vue des thématiques plus générales se développer. La colimite comme synthèse, l'observation comme adjoint à droite à la réaction. Ces constructions donnent des directions de plus haut niveau pour des investigations futures. D'un foncteur d'observation, on cherchera à interpréter son adjoint à droite, d'un amas de connaissances, on le conceptualisera à travers une colimite. Ces résultats demandent à être affinés et s'inscrivent dans l'interprétation standard.

5.1.1 De la portée d'un tel travail

Qu'est-ce que ce travail ? L'auteure craint qu'il s'agisse d'une version des montres à la moutarde [Rin90], sauce catégorique. Un document farfelu, qui finalement ne dit rien et s'efforce de parler des choses sans d'abord les comprendre pour ensuite prétendre à un point de vue intéressant. Ne sommes-nous pas là face à des fadaises enrobées d'une couche de notations péremptoires de par leur technicité ? Le noème a-t-il vraiment quelque chose à voir avec les colimites ? Le foncteur de réaction parle-t-il de quelque chose ? Les traductrices de tout temps ont fait leur travail sans se soucier d'aucune catégorie enrichie. Alors où allons nous, et qu'est-ce que cela apporte ?

L'auteure n'oserait qualifier ses conclusions de scientifiques et il serait prétentieux de le considérer comme artistique. C'est pourtant ce de quoi cela pourrait se rapprocher le plus. Une vision personnelle des intuitions, peintes dans une langue maîtrisée. Voici donc un tableau, une sculpture, un portrait calculatoire du monde réel. Ce portrait a-t-il une valeur scientifique, ou même sa place dans un rapport de stage pour le titre d'ingénieure ? L'auteure estime avoir appris qu'au moins un aspect de la méthode de l'ingénieure est le passage de l'abstrait au concret, du transcendantal à l'immanent. Les ponts se font avec des idées de ponts. L'idée d'un pont, sous toutes ses coutures, a-t-elle une quelconque valeur, ou est-ce sa réalisation (actuelle ou potentielle) qui lui en confère ? Il est tout à fait possible que ce document et les idées présentées ici valent autant que le plan d'un pont que personne n'a jamais construit, que peut-être personne ne souhaite construire, et que personne ne construira jamais.

Enfin, peut être pas. L'ambition de l'auteure est que quelqu'un lise ces mots et en retire quelque chose. Un sentiment, une simple idée, un étonnement, quelque chose comme une adjonction, un foncteur, une catégorie, qui puisse entrer résonance avec l'intime de la lectrice. En cela, ce travail pourrait se qualifier d'œuvre d'art. Ce faisant, voilà que les idées se déploient dans le monde actuel, et touchent des personnes. Cela est concret et c'est la vocation de ce papier. Les catégories sont des voûtes, qui absorbent les pressions de la complexité dans leurs épaisseurs, nous avons essayé de présenter l'ébauche de leurs constructions.

5.1.2 Limitations et critiques

L'auteure est au courant de ses lacunes et de son manque d'expertise dans tous les domaines dont elle a parlé, à l'exception de ce qui touche directement aux mathématiques. Ainsi, utiliser un langage compliqué pour rendre compte de la structure générale revient à demander à une géologue son expertise sur les sculptures de Claudel. Et c'est bien la première chose qui manque dans ce rapport, c'est une expertise extérieure. L'auteure prétend développer un langage de l'interdisciplinarité sans aucune collaboration interdisciplinaire. Cette critique est aussi vraie que légitime. À cela, l'auteure souhaiterait répondre que ce qui est proposé là n'est qu'une approximation de ce qui pourrait être, et qu'elle est tout à fait ouverte et extrêmement enthousiaste à l'idée d'une collaboration avec un quelconque domaine, particulièrement s'il pouvait être sociologique ou artistique.

L'auteure a utilisé la théorie des catégories comme syntaxe pour des théories générales dont sa connaissance ne va guère plus loin que son intuition. Cela est très limitant sachant l'abondance et la complexité des corpus établis sur les concepts soulevées. Une fois de plus, cela s'explique par le fait que ce travail n'est qu'un début et un appel. Bien que légitime, cette critique oublie peut-être que le propre d'une phénoménologie est de commencer par le soi, et donc par son intuition irréductible et évidemment, la construire avant de la développer reste indispensable à une bonne pratique de l'époché.

Finalement quel intérêt vraiment ? Va-t-on calculer des extensions de Kan à la boulangerie ? Qu'est-ce que cela nous apporterait d'avoir l'adjoint à droite de la lutte des classes ? Tout cela sert-il à grand chose ? Cette question reste encore ouverte, et seul un approfondissement et une implémentation sérieuse des outils développés permettra d'y répondre, si tant est que les idées de ce travail aient une profondeur et une consistence suffisante pour pouvoir s'y prêter.

5.2 Projets à venir

5.2.1 Prague : autoformalisation et catégories

Entre Août et Décembre 2022, l'auteure aura la chance de pouvoir travailler au CIIRC à Prague, sur les possibilités d'intersections entre les méthodes d'autoformalisation et la théorie des catégories. Des avancées dans ce domaine pourraient par exemple conduire à la fabrication de systèmes catégoriques automatiques d'après des structures données dans le langage naturel. D'un autre côté, l'application de la théorie des catégories aux principes de l'autoformalisation pourrait aussi aider les machines à trouver de nouvelles manières de structurer leurs raisonnements. Une piste prometteuse serait d'utiliser les nouvelles méthodes de compositionnalité sur des réseaux de neurones [CGG+22] créés pour l'autoformalisation. Le premier projet de l'auteure sera de formaliser une version du forcing de Kripke-Joyal au sein du prouveur Lean.

5.2.2 Thèse : à définir

L'auteure espère très fortement que le futur de sa carrière professionnelle se poursuivra par un doctorat. Sans qu'elle n'ait de piste concrète pour le moment, elle espère pouvoir se plonger encore plus profondément dans les mathématiques et la théorie des catégories pour essayer d'en faire ressortir des abstractions encore plus étranges et plus puissantes.

5.2.3 L'extension aux W-types

En attendant de trouver une thèse, et suite à une discussion avec Nicola Gambino (qu'elle remercie chaleureusement pour son aide précieuse à comprendre le forcing de Kripke-Joyal), l'auteure voudrait étendre l'outillage développé dans [AGH21] aux W-types, qui sont une généralisation des types inductifs (entiers naturels, listes, arbres, etc.). Ce travail permettrait d'ajouter une ligne au corollaire 4.18 de [AGH21], et donnerait un plus grand pouvoir d'expressivité du forcing pour la théorie des types homotopiques. Un tel travail commencerait par l'analyse précise de la sémantique des W-types dans le contexte d'une construction de Hofmann-Streicher sur un univers de Grothendieck constitué de *small maps*. Des investigation préliminaires indiquent qu'il faudra affronter des foncteurs polynomiaux, et leur faire subir des opérations similaires à celles que l'on peut avoir dans [Awo14]. Finalement, il faudra trouver quel genre de conditions permettent de forcer des termes d'un W-types.

5.2.4 Et les autres...

Le seul objectif, peut-être, de ce rapport est non pas de révolutionner le monde de la structure, mais plutôt de donner une envie d'utilisation, de proposer une collaboration. Les catégories sont des outils de pensée, et l'auteure pense que la philosophe, la sociologue, l'ingénieure, toutes pourraient profiter de cette merveilleuse technologie pour féconder leurs réflexions propres, tout comme en retour l'auteure utilise celle des philosophes pour penser le monde autour d'elle, celle des sociologues pour penser son genre et sa place dans la société, ou celle des ingénieures pour essayer de faire exister ses idées. L'auteure serait ainsi ravie de voir que quelqu'un estime avoir reconnu une adjonction quelque part. Elles sont partout.

Références

[AB07] Benedikt Löwe Andreas Blass, Ioanna M. Dimitriou. Inaccessible cardinals without the axiom of choice, 2007.

[AGH21] S. Awodey, N. Gambino, and S. Hazratpour. Kripke-joyal forcing for type theory and uniform fibrations, 2021.

[Aug12] Louis-Phillipe Auger. L'influence de la psychologie de la forme et de l'idéalisme transcendantal sur l'interprétation du noème perceptif par a. gurwitsch, 2012.

[Awo14] Steve Awodey. Natural models of homotopy type theory. *arXiv*, 2014.

[Bar81] Hendrik Pieter Barendregt. *The lambda calculus*, volume 103 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., 1981. Its syntax and semantics.

[BD98] John C. Baez and James Dolan. Categorification. *arXiv*, 1998.

[BS10] J. Baez and M. Stay. Physics, topology, logic and computation : A rosetta stone. In *New Structures for Physics*, pages 95–172. Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[CCHM16] Cyril Cohen, Thierry Coquand, Simon Huber, and Anders Mörtberg. Cubical type theory : a constructive interpretation of the univalence axiom, 2016.

[CGG+22] Geoffrey S. H. Cruttwell, Bruno Gavranovic, Neil Ghani, Paul W. Wilson, and Fabio Zanasi. Categorical foundations of gradient-based learning. In Ilya Sergey, editor, *Programming Languages and Systems - 31st European Symposium on Programming, ESOP 2022, Held as Part of the European Joint Conferences on Theory and Practice of Software, ETAPS 2022, Munich, Germany, April 2-7, 2022, Proceedings*, volume 13240 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–28. Springer, 2022.

[FS18] Brendan Fong and David I Spivak. Seven sketches in compositionality : An invitation to applied category theory, 2018.

[Gro86] Alexandre Grothendieck. R-écoltes et semailles. Notes, 1983-1986.

[Hus85] Edmund Husserl. *Idées directrices pour une phénoménologie et une philosophie phénoménologique pures.* Max Niemeyer 1928, 1985.

[Hus00] Edmund Husserl. *Méditations cartésiennes.* Librairie Philosophique Vrin, 2000.

[Kel05] G. M. Kelly. Basic concepts of enriched category theory. *Repr. Theory Appl. Categ.*, 2005.

[KL12] Chris Kapulkin and Peter LeFanu Lumsdaine. The simplicial model of univalent foundations (after voevodsky), 2012.

[Law64] F. William Lawvere. An elementary theory of the category of sets. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 52(6) :1506–1511, 1964.

[LM94] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic.* Springer New York, NY, 1994.

[LS86] Joachim Lambek and P. J. Scott. *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, volume 7 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, 1986.

[Mac71] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer-Verlag, New York, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[ML84] Per Martin-Löf. Intuitionistic type theory, 1984.

[OP16] Ian Orton and Andrew M. Pitts. Axioms for Modelling Cubical Type Theory in a Topos. In Jean-Marc Talbot and Laurent Regnier, editors, *25th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2016)*, volume 62 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 24 :1–24 :19, Dagstuhl, Germany, 2016. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.

[Rie17] E. Riehl. *Category Theory in Context.* Aurora : Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017.

[Rin90] Yann-Joachim Ringard. Les montres à moutarde : une approche intégrée au temps et à la nourriture, 1990.

[RV16] Emily Riehl and Dominic Verity. Infinity category theory from scratch, 2016.

[San17] Sam Sanders. To be or not to be constructive, that is not the question. *arXiv*, 2017.

[Uni13] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics.* https ://homotopytypetheory.org/book, Institute for Advanced Study, 2013.

[Voe14] Vladimir Voevodsky. The equivalence axiom and univalent models of type theory. (talk at cmu on february 4, 2010), 2014.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994.